М.Ш.Мамаюсупов

Боташев А.И.

Жогорку математика боюнча окума

3-бөлүк

Электрондук окуу китеп

- **АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР**
- **АНЫК ИНТЕГРАЛДАР**
- **ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР**
- **КАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ**

Ош-2018

УДК 51

ББК 22.11

М 22

Китеп Ош мамлекеттик университетинин«Жогорку математика» кафедрасында даярдалып, Билим берүү жана Илим минстирлигинин № 1107|1 (25.12.14) буйругу менен расмий окуу китеби катарында таанылган.

Редактору: п.и.к., доцент А.Аттокурова

Рецензенттер: ф.м.-д., профессорлор Ж.Сатаров, И.Ташполотов

Окумалардын топтомун жазган Мамаюсупов М. Ш.

М 22 Жогорку математика боюнча окума (3– бөлүк): Электрондук окуу китеби. – Ош: 2014, 2018, 2022 – 293 б.

ISBN 978 – 9967 – 18 – 000 – 0

«Жогорку математика боюнча окума» электрондук окуу китебинин 3 -бөлүгү, жогорку окуу жайларда окутулуучу матанализ, жогорку жана колдонмо математика сабактарын өздөштүрүүчү студенттерге жана окутуучуларга арналган. Китептин электрондук вариантын ОшМУ нун жана www.okuma.kg сайттарынан окууга болот.

Сын – пикирлерди төмөндөгү дарекке жөнөтүңүздөр:

723500, Ош ш., Ленин к., 331,

ОшМУ нун жогорку математика кафедрасы.

Электрондук дарек: mamaiusupov.m@gmail.com

М 1602010000 – 14 УДК 51

ISBN 978 – 9967 – 18 – 000 – 0 ББК 22,11

@ Мамаюсупов М.Ш.,

2022

Аалам бир чоң ыйык китеп жана ал математиканын тилинде жазылган, анын тамгалары математикалык белгилер, фигуралар болушуп, аларсыз ааламды адам тилинде түшүнүү мүмкүн эмес.

Галилей

Мазмуну

XI ГЛАВА. АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛ 6

§11.1 Анык эмес интеграл жана анын касиеттери 6

11.1.1 Алгачкы функция же анык эмес интеграл түшүнүгү 6

11.1.2 Элементардык функцияларды интегралдоо таблицасы 10

§11.2 Интегралдоо ыкмалары 13

11.2.1 Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу 13

Мисалдар 14

11.2.2 Бөлүктөп интегралдоо усулу 16

2-мисалдар 16

§11.3 Айрым функцияларды интегралдоо усулдары 23

11.3.1 Рационалдык функцияларды интегралдоо 23

Жалпы учурдагы рационалдык функциядан интеграл алуу усулдарын көрсөтөбүз. 27

11.3.2 Жөнөкөй же элементардык бөлчөктөрдү интегралдоо 28

4. Мисал: 29

4) $x+2x2+8x+7dx$ интегралын эсептөө үчүн, рационалдык функциянын бөлүмүндөгү көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз. 29

11.3.3 $Mx+Nx2+px+qk\,dx$ интегралын эсептөө 33

11.3. 4 Иррационалдык функциялардан интеграл алуу 36

5. Мисалдар: 37

11.3.5 Эйлердин ордуна коюулары (подстановкалары) 40

6. Мисалдар: 42

11.3.6 Айрым тригонометриялык функцияларды интегралдоо 46

7. Мисалдар: 47

Көнүгүүлөр 53

XII ГЛАВА. АНЫК ИНТЕГРАЛДАР 58

§12.1 Анык интеграл жана анын касиеттери 58

12.1.1 Анык интеграл түшүнүгүнүн келип чыгуусуна түрткү болгон мисалдар 58

12.1.2 Анык интегралдын аныктамасы 61

8. мисалдар 64

12.1.3 Функциялардын интегралдануучулук шарттары 69

12.1.4 Анык интегралдын касиеттери 73

§12.2 Анык интеграл жөнүндөгү негизги теоремалар 77

12.2.1 Орточо маани жөнүндөгү теорема 77

9. Мисалдар 80

12.2.2 Жогорку предели өзгөрүлмө болгон анык интеграл 86

12.2.3 Ньютон – Лейбництин формуласы 88

§12.3 Анык интегралды эсептөө ыкмалары 89

12.3.1 Интегралдоо өзгөрүлмөлөрүн алмаштыруу усулу......89
10. Мисалдар 91
12.3.2 Бөлүктөп интегралдоо усулу......95
12.3.3 Анык интегралды жакындаштырып эсептөө ыкмалары.......97
§ 12.4 Анык интегралдын геометриялык колдонулуштары 105
12.4.1 Тик бурчтуу координаталар системасында жалпак фигуралардын аянтын эсептөө эрежелери......105
12.4.2 Полярдык координаталар системасында жалпак фигуралардын аянтын эсептөө......111
11. Мисалдар......113
12.4.3 Жалпак ийринин узундугун эсептөө......114
12.4.4 Ийринин жаасынын узундугун дифференциалы......120
12.4.5 Айлануудан пайда болгон фигуралардын көлөмүн жана бетинин аянтын эсептөө......122
§ 12.5 Анык интегралдын физикалык колдонулуштары......125
12.5.1 Өзгөрүлмө күчтүн жумушу 125
12.5.2 Которулууну жана жолду эсептөө 127
12.5.3 Материалдык сызыктардын жана жалпак пластинкалардын инерция моменттери......131
12.5.4 Бир тектүү эмес стерженин массасы жана оордук борбору 136
12.5.5 Тегиздиктеги нерселердин оордук борборлору 138
Көнүгүүлөр 144
XIII ГЛАВА. ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР 151
§ 13.1 Пределдери чексиз болгон интегралдар 151
13.1.1 Чектелбеген аралыктар боюнча интеграл алуу......151
13.1.2 Оң белгидеги функциялардан алынган I –түрдөгү (роддогу) өздүк эмес интегралдарды баалоо 156
13.1.3 Абсолюттук жыйналуучу 1 – роддогу интегралдар......162
§ 13.2 Интегралдоо аралыгында чектелбеген функциялардын II – роддогу интегралдары......168
13.2.1 II – роддогу өздүк эмес интегралдын аныктоосу 168
13.2.2 Оң функциялардын II – роддогу өздүк эмес интегралдарын салыштыруу ыкмалары 171
13.2.3 Абсолюттук жыйналуучу II – роддогу өздүк эмес интегралдар......174
13.2.4 II – роддогу өздүк эмес интегралдын башкы мааниси......175
Көнүгүүлөр 177
XIV ГЛАВА. КАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ......180
§ 14.1 Сандык катарлар 180
14.1.1 Сандык катар жана анын суммасы......180
14.1.2 Жыйналуучу катарлардын негизги касиеттери 184
14.1.3 Катардын жыйналуучулугунун зарыл жана жетиштүү шарты (Кошинин критерийи) 188
§14.2 Мүчөлөрү оң болгон катарлардын жыйналуучулук белгилери 192
14.2.1 Оң катарлардын жыйналуучулук шарттары......192
12. Мисалдар 195
14.2.2 Даламбердин жана Кошинин жыйналуучулук белгилери......197
14. Мисалдар 200
14.2.3 Жыйналуучулуктун интегралдык белгиси......202
13. Мисалдар 204

§ 14.3 Белгиси өзгөрүлмө катарлар 207
14.3.1 Белгиси кезектешме катарлар. Лейбництин белгиси 207
14.3.2 Мүчөлөрү эркин белгиге ээ болгон катарлар. Абсолюттук жана шарттуу жыйналуучулук 209
§ 14.4 Функционалдык катарлар 214
14.4.1 Функционалдык катарлардын жыйналуу областы 214
14.4.2 Бир калыпта жыйналуучулук 217
14.4.3 Вейерштрасстын бир калыпта жыйналуучулук белгиси 221
14.4.4 Бир калыпта жыйналуучу катарлардын касиеттери 224
§14.5 Даражалуу катарлар 231
14.5.1 Даражалуу катардын жыйналуу интервалы жана радиусу 231
15. Мисалдар 235
14.5.2 Даражалуу катардын бир калыпта жыйналуучулугу жана анын суммасынын үзгүлтүксүздүгү 238
14.5.3 Даражалуу катарларды мүчөлөп интегралдоо жана дифференцирлөө 239
§ 14.6 Тейлордун катары 243
14.6.1 Функцияларды Тейлордун катарына ажыратуу 243
14.6.3 Элементардык функцияларды Тейлордун катарына ажыратуу 249
Негизги элементардык функцияларды Маклорендин катарына ажыратуу таблицасы 254
16. Мисалдар 255
§ 14.7 Фурьенин катарлары 259
14.7.1 Квадраты менен интегралдануучу функциялар 259
14.7.2 $L2a, b$ мейкиндигиндеги ортогоналдык системалар боюнча Фурьенин катарларын түзүү 261
14.7.3 $L2-\pi, \pi$ мейкиндигиндеги тригонометриялык ортогоналдык системага карата Фурьенин катары 262
14.7.4 Фурьенин тригонометриялык катарына ажыроо шарттары 264
17. Мисалдар 267
14.7.5 Жуп жана так функциялар үчүн Фурьенин катары 271
14.7.6 Функцияларды синустар же косинустар боюнча катарга ажыратуу 274
14.7.7 $\text{T} = 2l$ мезгилдүү функцияларды Фурьенин катарына ажыратуу 275
14.7.8 Фурьенин катарын комплекстик жазылышы 279
Көнүгүүлөр 282

XI ГЛАВА. АНЫК ЭМЕС ИНТЕГРАЛ

§11.1 Анык эмес интеграл жана анын касиеттери

11.1.1 Алгачкы функция же анык эмес интеграл түшүнүгү

Чөйрө таануу процессинде математикалык тил негизги таануу каражаты катары кызмат кылары белгилүү. Анткени кандай гана кубулуш болбосун, аны сандык чени же өлчөмдөрү боюнча айырмалап түшүнүп, ошол сапатта кабыл алууга болот. Кубулуш жүрүп жаткан аймактагы процессти толук билүү үчүн, ошол аймакты чыныгы сандардын мейкиндигине бир маанилүү чагылтууга жөндөмдүү математикалык тилдеги модел-функциялар же туюнтмалар, теңдемелер аркылуу үйрөнүп келебиз.

Аалам, сүңгүп жете алгыс чексиз майда жана эбегейсиз өлчөмдөгү чексиз чоң бөлүктөрдөн куралгандыктан, чыныгы сандардын түзүлүү табыятын ааламга окшоштуруп, адамдын көз мерчеми жете албаган бөлүктөрдөгү абалдарды предел аппараты менен баалап үйрөнөбүз. Кубулуштардын чекиттерге чейинки абалын майдалап үйрөнүүчү математикалык аппараттар пределден келтирилип чыгарылган функцияны дифференцирлөө (туундулоо) амалынын жардамы менен түзүлөрүн карап өттүк. белгилүү. Кээде, тескерисинче чекиттерде болуп жаткан майда абалдарды кураштырып, кайсы бир бүтүн кубулушту түптөп үйрөнүүгө туура келет. Математикада мындай кураштырууну “суммалоо” деген маанини түшүндүргөн интегралдоо амалы катарында кабыл алабыз. Ошентип, **дифференцирлөө менен интегралдоо амалдарын өз ара тескери амалдар** деп эсептөөгө болот.

11.1 Аныктама. *Эгерде* $f(x)$ *жана* $F(x)$ *функциялары үчүн кайсы бир* $x \in X$ *аралыгында* $F'(x) = f(x)$ (1)

теңдештиги орун алса, анда ушул X *аралыгында* $F(x)$ *функциясын* $f(x)$ *функциясына алгачкы функция деп айтабыз.*

Аныктамада баяндалгандай, берилген Х аралыгын ар бир x чекитинде дифференцирленүүчү болгон $F(x)$ функциясы гана, алгачкы функция боло алат.

Мисалы, $F(x) = x^4$ функциясы $X = (-\infty, +\infty) \equiv R$ аралыгында, $f(x) = 4x^3$ функциясына алгачкы функция болот. Ал эми $F(x) = \arcsin x$ функциясы, $X = (-1, +1)$ аралыгында $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясына алгачкы функция болот.

Турактуу сандын туундусу нөлгө тең болгондуктан, (1) ден $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясына алгачкы функция болсо, анда $F(x) + C$ функциясы да алгачкы функция болору келип чыгат ($C - const$). Анткени туунду алуу эрежеси боюнча

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

теңдештиги аткарылат. Ошентип X аралыгында $f(x)$ функциясын алгачкы функциясы жашаса, анда алар чексиз көп болушуп, бири – биринен турактуу C чоңдугуна айырмаланышкан алгачкы функциялар болушат. Эгерде $X = (a,\ b)$ арлыгында $f(x)$ функциясын каалагандай эки $F(x)$ жана $\Phi(x)$ алгачкы функциялары берилишсе, анда X аралыгында алардын айырмасы турактуу сан болорун көрсөтүүгө болот. Чынында эле, алгачкы функциялар катарында алар

$\forall x \in X: F'(x) = f(x) \wedge \Phi'(x) = f(x)$ шарттарына баш ийишет десек,

анда дифференцирленүүчү функциялардын айырмасы катарында киргизилген $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$ жардамчы функциясы дифференцирленүүчү болуп, Лагранждын чектүү өсүндүлөр боюнча теоремасын шарттарын канааттандыргандыктан, $X = (a,\ b)$ арлыгынан алынган каалагандай эки $x_0,\ x$ чекиттерин арасынан η чекити табылып,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\eta) \cdot (x - x_0)$$

теңдештиги орун алат. Экинчи жактан, X аралыгында

$\varphi'(x) = [\Phi(x) - F(x)]' = f(x) - f(x) = 0$ болгондуктан,

$\eta \in [x,\ x_0] \subset X \Rightarrow \varphi'(\eta) = 0$ келип чыгып, $\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0$ айырмасын нөлгө тең болорун көрөбүз. Мындан $\varphi(x)$ жардамчы функциясын $[x,\ x_0]$ аралыгында турактуу $\varphi(x_0)$ санына тең болору билинет $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Анда $x,\ x_0$ чекиттери эркин тандалгандыктан, бүтүндөй X аралыгында

$\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) \equiv C - const.$ болору келип чыгып, экөө деп алынган алгачкы функциялардын арасында

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

байланышы орун аларына ишенебиз.

11.2 Аныктама. *$f(x)$ функциясын $X = (a,\ b)$ интервалындагы бардык алгачкы функцияларынын тобун, берилген интервал боюнча $f(x)$ функциясынан алынган анык эмес интеграл деп атайбыз жана*

$$\int f(x)\,dx$$

символу менен белгилейбиз.

Мында $\int$ – интегралдоо белгиси ($S -$ сумма сөзүнүн баш тамгасын көркөмдөп жазуудан алынган), $f(x)dx -$интеграл алдындагы туюнтма, ал эми $f(x) -$ интеграл алдындагы функция, $x -$ интегралдоо өзгөрүлмөсү деп аталышат.

Берилген $f(x)$ функциясын алгачкы $F(x)$ функциясын табуу процессин жүрүшүн же анык эмес интегралды табуу амалын, $f(x)$ функциясын интегралдоо дейбиз. Иш жүзүндө функцияны интегралдоо амалы, берилген туундусу боюнча функцияны табуу амалы болуп, дифференцирлөөгө (туунду алууга) карата тескери амал болот жана

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (2)$$

көрүнүштөгү интегралдык формула менен жазылат. Табылган интегралдын $F(x) + C$ маанисин туура экендиги, андан

$[F(x) + C]' = f(x)$ туунду алуу менен текшерилет.

Ошентип, функцияны интегралдоо менен дифференцирлөө өз ара тескери амалдар болушуп, интегралдоо да дифференцирлөө эрежелерине негизделген касиеттерге ээ болот:

1^0 . $f(x)$ функциясын $X = (a,\ b)$ интервалында интегралдануучу функция болушу үчүн, анын ушул аралыкта үзгүлтүксүз алгачкы функциясы жашашы керек (*§12.1 де анык интегралдын жашоо шартын кара*).

2^0. Анык эмес интегралдын дифференциалы

$d[\int f(x)\,dx] = f(x)dx -$ интеграл алдындагы туюнтмага барабар.

Далилдөө: ► $\forall x \in X: F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; d[\int f(x)\,dx] =$

$= d[F(x) + C\,] = d[F(x)] + 0 = F'(x)dx = f(x)dx$ болот. ◄

3^0. Анык эмес интегралдын туундусу

$[\int f(x)\,dx]' = f(x)$ эрежеси менен эсептелет.

Далилдөө: ► $[\int f(x)\,dx]' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. ◄

4^0. Калагандай функциянын дифференциалынан алынган анык эмес интеграл, ал функциянын өзүнө С турактуу санын кошконго барабар: $\int dF(x) = F(x) + C$.

Далилдөө: ► $\forall x \in X: F'(x) = f(x) \;\Rightarrow\; \int dF(x) = \int F'(x)dx =$

$= \int f(x)\,dx = F(x) + C$. ◄

5^0. Каалагандай a турактуу санын ($a \neq 0$), анык эмес интегралдын белгисинин сыртына чыгарууга болот:

$\int a\, f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx.$

Далилдөө: ►Теңдештиктин оң жана сол жактарынан өз өзүнчө туунду алабыз. Сол жагынан туунду алганда 3^0 - негизинде

$[\int a\, f(x)\,dx]' = a\, f(x),$

ал эми оң жагынан алынган туундуда турактууну туундунун сыртына чыгарууга болгондуктан

$[a \int f(x)\,dx]' = a \cdot [\int f(x)\,dx]' = a\, f(x)$ келип чыгып, теңдештиктин

эки жагынын тең бир эле функциянын алгачкы функциялары болорун же 5^0- тууралыгын көрөбүз. ◄

6^0 . Чектүү сандагы интегралдануучу функциялардын суммасын (айырмасын) интегралы, кошулуучулардын интегралдарынын суммасына (айырмасына) барабар:

$$\int\left[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)dx\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \int f_k(x)dx.$$

Далилдөө: ► Бул касиетти эки кошулуучу ($n = 2$) үчүн текшерели. Анда берилген аралыкта интегралданууучу болгон $f(x)$, $\varphi(x)$ функцияларына карата

$$\int [\, f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

теңдештиги орун алышы керек. Чынында эле, теңдештиктин эки жагынан өз өзүнчө туунду алсак: 3^0 – негизинде сол жагынан

$$\left(\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x),$$

оң жагынан

$$(\int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx)' = [\int f(x)dx]' \pm [\int \varphi(x)dx]' = f(x) \pm \varphi(x)$$

туундуларын таап, теңдештиктин эки жагында тең бир эле функциянын алгачкы функцияларын тобу турганын, же теңдештиктин туура экендигин көрөбүз. ◄

11.1.2 Элементардык функцияларды интегралдоо таблицасы

Элементардык функциялардын туундусун эсептөө таблицасын негизинде (§9.3, II – бөлүк), жогорудагы $1^0 - 6^0$ касиеттерди эске алып, элементардык функцияларды интегралдоо таблицасын түзө алабыз, б.а. 11.1 Аныктамага таянып, элементардык функциялардын (1) теңдештиги орун ала тургандай алгачкы функцияларын аныктап, аларды (2) интегралдык формуласы көрүнүштө жазабыз:

1. $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,,\ \alpha \neq -1\,,\ x > 0.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,, x \neq 0.$

3. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,, 0 < a \neq 1\,.$ Эгерде $a = e$ болсо, $\int e^x \, dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

6. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -\text{ctg}\, x + C,\ x \neq n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

7. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = \text{tg}\, x + C\ ,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1,$ жалпы учурда

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + \text{C}\ , \quad |x| < |a|$ көрүнүштө жазылат.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\ ,\ (|x| > |a|\ \textit{болсо}\ "\ -\ "\ \textit{алынат})$.

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x + C\ ,$ жалпы учурда

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ \text{arctg}\frac{x}{a} + \text{C}$ көрүнүштө болот.

11. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|} + C\ ,\ |x| \neq a.$

12. $\int sh\ x\ dx = ch\ x + C.$

13. $\int ch\ x\ dx = sh\ x + C.$

14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = -th\ x + C$.

15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\ x + C,\ x \neq 0.$

Түзүлгөн таблицанын туура экендигин ишенүү үчүн, оң жактарынан туунду алып, анын сол жагындагы интеграл алдындагы функцияларга тең болорун текшерүү жетиштүү болот. Ошентип, элементардык функциялардын анык эмес интегралын табууда, ар бир жолу алгачкы функцияны издөө убарагерчилигин тартпастан, таблицаны жатка билип, интеграл алдындагы функцияларды арифметикалык жана алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен, 1 – 15 таблицалык көрүнүштөрдүн бирине келтирип, аны тикелей колдонууга шарт түзгөн интеграл алуу эреже-амалдарын киргизебиз.

Мисалы, 1) $\int \left(\frac{(1+x)^2}{x^3+x} + \sin x\right) dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)} dx +$

$+ \int \sin x\, dx = \int \frac{1+x^2+2x}{x(1+x^2)} dx + \int \sin x\, dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \sin x\, dx =$

$= \ln|x| + 2\mathrm{arctg}\, x - \cos x + C$.

2) $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\cos x + C$.◄◄

3) $\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}} + C.$

4) $\int \frac{5\cdot 7^x + 2\cdot 3^x}{21^x} dx = 5\int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx + 2\int \left(\frac{1}{7}\right)^x dx = 5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln\frac{1}{7}} + C$.

5) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 dx = \int \left(x^3 - 2 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int (x^3 - 2 + x^{-3})\, dx =$

$= \int x^3\, dx - 2\int dx + \int x^{-3} dx = \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{1}{2x^2} + C$.

Бардык элементардык функциялардын туундулары элементардык функциялар болуп, бардык элемантардык функциялар үчүн туунду алуу таблицасы жарактуу болсо, **анык эмес интегралдарда бардык эле элементардык функциялардын анык эмес интегралдары элементардык функциялар боло беришпейт.** Ошондуктан интеграл алдында өз аныкталуу областында үзгүлтүксүз болуп, теориялык жактан анык эмес интегралын жашашы ырасталган элементардык функция турганы менен, 1 – 15 таблицасын колдонуп, анын анык эмес интегралын табууга мүмкүн болбогон учурлар кездешет. Мындай учурларда, интегралдын маанисин чектүү сандагы элементардык функциялардын арифметикалык жана суперпозициялык туюнтулушу катарында жазууга мүмкүн болбойт. Алардын катарына

$\int e^{-x^2} dx$ –Пуассондун интегралы (каталыктардын интегралы),

$\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2\, dx$ –Френелдин интегралдары,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегралдык логарифм ($0 < x \neq 1$),

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегралдык синус ($x \neq 0$),

$\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ – интегралдык косинус ($x \neq 0$)

аталыштары менен белгилүү болгон, интегралданбоочу деп аталган анык эмес интегралдарды кошууга болот.

Эскертүү: Интеграл алдындагы функцияларды Тейлордун көп мүчөсүнө ажыратуу менен, жогорудагы таблицаны пайдалануу мүмкүнчүлүгүн түзүүгө жана интегралдардын керектүү тактыкка чейинки жакындаштырылган маанилерин табууга болот.

§11.2 Интегралдоо ыкмалары

11.2.1 Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу

Айрым учурларда экинчи бир $x = \varphi(t)$ функциясын (белгилөөсүн) жардамы менен жаңы t өзгөрүлмөсүн киргизип, $\int f(x)\,dx$ анык эмес интегралын алдындагы $f(x)dx$ туюнтмасын жөнөкөйлөтүп, 1 - 15 таблицалык көрүнүшкө алып келүүгө мүмкүнчүлүк түзөбүз.

Мындай ыкма өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу деп аталып, $\varphi(t)$ функциясынын:

1) $\varphi'(t)$ – үзгүлтүксүз туундусу жашаган,

2) $\varphi(t)$ функциясын бир маанилүү $t = \psi(x)$ тескери функциясы табылган учурларда колдонулат. Бул учурда (2) интегралдык формула

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

көрүнүштө жазылып, барабардыктын оң жагындагы интеграл эсептелип бүткөн соң, t нын ордуна тескери $t = \psi(x)$ туюнтуусун жардамы менен x өзгөрүлмөсү кайра коюлат.

► (3) теңдештигин далилдөө үчүн анык эмес интегралдын 3^0 –касиетин , t өзгөрүлмөсүнө карата татаал функциядан туунду алуу жана тескери функциянын $t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}$ $(\varphi'(t) \neq 0)$ туундусун эсептөө эрежелерин колдонобуз. (3) түн оң жагынан

$$\left(\int f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)dt\right)'_t \cdot t'_x =$$

$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$ жана сол жагынан

$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x)$ туунду алып, алардын тең экендигин же (3) орун аларын көрөбүз. ◀

Мисалдар

1) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx = \left|\begin{matrix} x = \frac{1}{t}\ \textit{десек}, \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt, \\ t = \frac{1}{x}\end{matrix}\right| = \int t^2\cdot e^t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}dt\right) = -\int e^t\,dt$

$= e^t + C = e^{\frac{1}{x}} + C$.

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$ интегралын эсептегиле.

$x = a\cdot sht$ белгилөөсүн жардамы менен x өзгөрүлмөсүн t өзгөрүлмөсүнө алмаштыралы. Анда

$$sh\,t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \ \Rightarrow\ x = a\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2} \ \Leftrightarrow\ ae^{2t} - 2xe^t - a = 0\ \Rightarrow$$

e^t га карата квадраттык теңдеме катарында чыгарсак $e^t = \frac{x\pm\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ болот. $e^t > 0$ болгондуктан "+" белгисин алып, $e^t = \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ теңдештигине ээ болобуз. Аны логарифмдеп тескерисин тапсак

$t = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a$ келип чыгып, ($x+\sqrt{x^2+a^2} > 0, a > 0$) эске алынды) $dx = a\,cht\,dt$ болгондуктан, берилген интеграл

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{a\,ch\,t\,dt}{\sqrt{a^2(sh^2t+1)}} = \int\frac{a\,ch\,t\,dt}{a\,ch\,t} = \int dt = t + C =$

$= \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \ln a + C$ көрүнүштө эсептелет.

3) $\int\sin 9x\,dx = \left|\begin{matrix} x = \frac{t}{9} \Leftrightarrow t = 9x, \\ dx = \frac{1}{9}dt\end{matrix}\right| = \int\sin\left(9\cdot\frac{t}{9}\right)\cdot\frac{1}{9}dt = \frac{1}{9}\int\sin t\,dt =$

$= -\frac{1}{9}\cos t + C = -\frac{1}{9}\cos 9x + C$.

$$4)\ \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{c} x = t^2 - 1,\ dx = 2\,tdt, \\ t = \sqrt{x+1}\ ,\ (+) \\ \textit{белгиси алынды.} \end{array} \right| = \int \frac{2\,tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\ \mathrm{arctg}\ t + C = 2\ \mathrm{arctg}\sqrt{x+1} + C\,.$$

Айрым учурда $x = \varphi(t)$ белгилөөсүн ордуна $t = \psi(x)$ тескери белгилөөсүн колдонуп, өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу ыңгайлуу болот. Бул учурда интеграл алдындагы туюнтма

$$f(x)dx = \mathrm{g}[\psi(x)] \cdot \psi'(x)dx = \mathrm{g}[\psi(x)]d[\psi(x)\ ] = \mathrm{g}(t)\ dt$$

көрүнүшкө келип, мурдагыга караганда интегралдоо жеңилдеп,

$$\int f(x)dx = \int \mathrm{g}(t)\ dt\ = F(t) + C| = F[\psi(x)]) + C \qquad (4)$$

көрүнүштө эсептелет жана t өзгөрүлмөсүн ордуна $t = \psi(x)$ маанисин коюу менен аяктайт.

(4) тү колдонууга мисалдарды көрсөтөлү:

$$5)\ \int \frac{dx}{x+5} = \left| \begin{array}{c} t = x + 5 \Leftrightarrow x = t - 5, \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+5| + \mathrm{C}\,.$$

$$6)\ \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} t = \arcsin x\,, \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 + C\,.$$

$$7)\ \int \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}dx = \left| \begin{array}{c} t = 2^x + 2^{-x}, (t > 0) \\ dt = (2^x \cdot \ln 2 - 2^{-x} \cdot \ln 2)dx = \\ = \ln 2\ (2^x - 2^{-x})dx \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln t + C = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln(2^x + 2^{-x}) + C\,.$$

$$8)\ \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x + 1}\,, \\ 2dt = \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}, \\ e^x = t^2 - 1 \end{array} \right| = \int e^x \cdot \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int (t^2 - 1) \cdot 2dt =$$

$$= 2\int (t^2 - 1)dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - t\right] + \ C = \frac{2}{3}\left[(\sqrt{e^x+1}\,)^3\right] - 2\sqrt{e^x+1} + \mathrm{C}\,.$$

$$9)\ \int \mathrm{tg}\,x\ dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x, \\ d(\cos x\ ) = -\sin x\ dx \end{array} \right| = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(-\sin x dx)}{\cos x} =$$

$= \int \frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln|\cos x| + C$.

11.2.2 Бөлүктөп интегралдоо усулу

Көбөйтүндүнү $d(u \cdot v) = v\,du + u\,dv$ дифференцирлөө эрежесин пайдаланып, $u\,dv = d(u \cdot v) - v\,du$ теңдештигине интегралдоонун

4^0 – касиетин колдонуу менен $\int u\,dv = \int d(u \cdot v) - \int v\,du$ интегралын

$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du + C$, же (5)

$\int v\,du = u \cdot v - \int u\,dv + C$

көрүнүштөрдө эсептей алабыз. (5) бөлүктөп интегралдоонун формуласы деп аталып, $\int v\,du$ интегралын эсептөө, мурдагы $\int u\,dv$ интегралын эсептөөгө караганда жеңилирээк болгон учурларда колдонулат.

2-мисалдар

(5) формуласын колдонууга карата мисалдарды көрсөтөлү:

1) $\int x \cdot \text{arctg}\, x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \text{arctg}\, x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = x \cdot dx = \frac{1}{2}d(x^2), \\ v = \frac{1}{2}x^2 . \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2 \cdot \text{arctg}\, x -$

$- \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2 \cdot \text{arctg}\, x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2 \cdot \text{arctg}\, x}{2} - \frac{1}{2}\int \left[1 - \frac{1}{1+x^2}\right]dx =$

$= \frac{x^2 \cdot \text{arctg}\, x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\text{arctg}\, x + C$.

2) $\int x\,e^x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| = x\,e^x - \int e^x\,dx =$

$= x\,e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$.

3) $\int (2-3x)\cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = 2-3x \Rightarrow du = -3dx, \\ dv = \cos x \Rightarrow v = \sin x \end{matrix} \right| =$

$= (2-3x)\sin x + 3\int \sin x\,dx = (2-3x)\sin x - 3\cos x + C$.

4) $\int \ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} =$

$= x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$◄

Мисалдарда (5) формуласын биринчиси колдонулду, анткени экинчисин колдонгондо интегралды эсептөө мурдагыдан татаалдашып кетмек. Айрым учурларда бөлүктөп интегралдоо ыкмасын бир жолу колдонуудан кийин, интеграл алдындагы туюнтма жөнөкөйлөбөсө, анда аны экинчи же бир канча жолу кайталап колдонуу мүмкүн:

$$5)\ \int (\arcsin x)^2 dx = \left| \begin{array}{c} u = (\arcsin x)^2 \Rightarrow du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx, \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| =$$

$$= x(\arcsin x)^2 - \int \frac{x \cdot 2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Акыркы интегралды таблицалык көрүнүшкө келтирүү мүмкүн эместей көрүнгөндүктөн, аны өзүнчө бөлүп алып, дагы бир жолу бөлүктөп интегралдап көрөлү:

$$\int \frac{x \cdot 2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ dv = \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow v = \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ = -\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -2\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= -2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + 2\int dx = -2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + 2x + C.$$

Натыйжада, берилген интеграл

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C$$

көрүнүштө эсептелет.

$$6)\ \int x^2\ 5^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx, \\ dv = 5^x dx \Rightarrow v = \frac{5^x}{\ln 5} \end{array} \right| = \frac{x^2\ 5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5} \cdot 2xdx =$$

$= \frac{x^2\ 5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln 5} \cdot \int 5^x\, x\, dx$. Акыркы интегралды кайра бир жолу бөлүктөп интегралдап,

$$\int 5^x\, x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = 5^x dx \Rightarrow v = \frac{5^x}{\ln 5} \end{array} \right| = \frac{x\ 5^x}{\ln 5} - \int \frac{5^x}{\ln 5}dx =$$

$$= \frac{x\,5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \int 5^x dx = \frac{x\,5^x}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \cdot \frac{5^x}{\ln 5} + C = \frac{x\,5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5} + C\,.$$

табылган маанисин жогорку айырмага коюп,

$$\int x^2\ 5^x dx = \frac{x^2\,5^x}{\ln 5} - \frac{2}{\ln 5}\left[\frac{x\,5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5} + C\right] =$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5} \cdot \left[x^2 - \frac{2x}{\ln 5} + \frac{2}{\ln^2 5}\right] - \frac{2}{\ln 5} \cdot C = \left| \begin{array}{c} C \text{ каалагандай турактуу.} \\ -\frac{2}{\ln 5} \cdot C \text{ ны, (+C) деп} \\ \text{алууга болот.} \end{array} \right| =$$

$= \frac{5^x}{\ln 5} \cdot \left[x^2 - \frac{2x}{\ln 5} + \frac{2}{\ln^2 5}\right] + C$ жообуна ээ болобуз.

Кээде бөлүктөп интегралдоо кадамдарын жүрүшүндө, алгачкы интегралга кайрадан кайтып келген учурлар кездешет. Мындай учурда алгачкы жана ага кайрылып келген интегралдарды бир белгисиз өзгөрүлмө катары эсептеп, аларды байланыштырган теңдештиктен белгисиз өзгөрүлмө катары таап, табылган чечимди алгачкы интегралдын мааниси катары кабыл алабыз.

7) $\int\ e^{5x} \cos x\, dx$ интегралын эсептейли. Бөлүктөп интегралдоонун биринчи кадамында

$$\int\ e^{5x} \cos x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{5x} \Rightarrow du = 5e^{5x} dx, \\ dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= e^{5x} \sin x - 5 \int \sin x \cdot\ e^{5x}\, dx;$$

экинчи кадамында

$$\int \sin x \cdot\ e^{5x}\, dx = \left| \begin{array}{c} u = e^{5x} \Rightarrow du = 5e^{5x} dx, \\ dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$= -\cos x\, e^{5x} + 5 \int\ e^{5x} \cos x\, dx$ ээ болуп, кайрадан

$\int\ e^{5x} \cos x\, dx = e^{5x} \sin x - 5[-\cos x\, e^{5x} + 5 \int\ e^{5x} \cos x\, dx]$ же

$$\int\ e^{5x} \cos x\, dx = e^{5x} \sin x + 5 \cos x\, e^{5x} - 25 \int\ e^{5x} \cos x\, dx$$

алгачкы интеграл катышкан туюнтмага келебиз. Мындан

$t = \int e^{5x} \cos x \, dx$ белгилөөсүн киргизип, акыркы теңдештикти t га карата теңдеме катары чыгарып,

$t = e^{5x} \sin x + 5 \cos x \, e^{5x} - 25 \, t$ чечимине же башында берилген интегралдын

$t \equiv \int e^{5x} \cos x \, dx = \frac{e^{5x} \sin x + 5 \cos x \, e^{5x}}{26} + C$ маанисин табабыз.

8) $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ $(|x| < |a|)$ интегралын эсептегиле.

Бөлүктөп интегралдоонун биринчи кадамында эле,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow du = \frac{(a^2 - x^2)'}{2\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ \quad = \frac{-x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, ; \;\; dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \sqrt{a^2 - x^2} +$$

$+ \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$ ээ болобуз. Акыркы интегралды, интеграл алдындагы функциянын алымына a^2 санын кошуп жана кемитип

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2) \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx =$$

$= a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx + C$ көрүнүштө эсептеп, маанисин ордуна койсок,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx + 2C$$

теңдештиги келип чыгат. Аны $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ белгисизине карата сызыктуу теңдеме катарында чыгарып, эсептөөнү талап кылган интегралдын

$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{1}{2} \, a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$ жообун алабыз. Мында $\forall C - const. \wedge 2C - const. \Rightarrow C \Leftrightarrow 2C$ болгондуктан, C = 2C деп алдык.

Бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонуу менен,

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \, x^k \;\; (b_k \in Q, x \in R)$$

сыяктуу $n-$ тартиптеги көп мүчөлөр менен трансценденттик функциялардын көбөйтүндүлөрүн кармаган айрым туюнтмаларды интегралдоо мүмкүнчүлүгү түзүлөт:

***Б*₁)** $\int P_n(x)\ln x\,dx -$ интегралын

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$, $\quad dv = P_n(x)dx \Rightarrow v = \int P_n(x)dx = Q_{n+1}(x)$ белгилөөлөрүн жардамы менен, (5) ти колдонуп эсептөөгө болот. Мында $Q_{n+1}(x)$ деп $(n+1) -$ тартиптеги көп мүчөсү белгиленген.

***Б*₂)** $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,\beta x\,dx$ −интегралына

$u = \mathrm{arctg}\,\beta x \Rightarrow du = \frac{\beta dx}{1+(\beta x^2)}$,

$dv = P_n(x)dx \Rightarrow v = Q_{n+1}(x)$ колдонуу мүмкүн.

Б₃) $\int P_n(x)\arcsin\beta x\,dx \quad (\int P_n(x)\mathrm{arc}\cos\beta x\,dx) -$ интегралына

$u = \arcsin\beta x \ (u = \mathrm{arc}\cos\beta x) \Rightarrow du = \frac{\beta dx}{\sqrt{2-(\beta x^2)}} \left(du = -\frac{\beta dx}{\sqrt{2-(\beta x^2)}}\right)$;

$dv = P_n(x)dx \Rightarrow v = \int P_n(x)dx = Q_{n+1}(x)$ белгилөөлөрүн колдонобуз.

Мисалдар.

$$9)\ \int(3x^2+1)\mathrm{arctg}\,x\ dx = \left| \begin{array}{c} u = \mathrm{arctg}\,x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = P_2(x)dx = (3x^2+1)dx \Rightarrow \\ v = \int(3x^2+1)dx = Q_3(x) = x^3 + x \end{array} \right| =$$

$$= (x^3+x)\,\mathrm{arctg}\,x - \int\frac{(x^3+x)dx}{1+x^2} = (x^3+x)\mathrm{arctg}\,x - \int x\,dx =$$

$$= (x^3+x)\mathrm{arctg}\,x - \frac{x^2}{2} + C.$$

$$10)\ \int(4x^3+2x)\ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \\ dv = P_3(x)dx = (4x^3+2x)dx \Rightarrow \\ v = Q_4(x) = x^4 + x^2 \end{array} \right| =$$

$$= (x^4+x^2)\ln x - \int(x^4+x^2)\cdot\frac{dx}{x} = (x^4+x^2)\ln x - \int(x^3+x)dx =$$

$$= (x^4+x^2)\ln x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Бөлүктөп интегралдоо усулун бир канча кадамдарга улантуу менен

Б$_4$) $\int P_n(x)\, e^{\beta x}\, dx \ \ (\beta \neq 0)$ көрүнүштөгү трансценденттик туюнтманын интегралын эсептөөгө болот. Ал үчүн

$u = P_n(x) \Rightarrow du = P_n{}'(x)dx, \ \ dv = e^{\beta x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{\beta}\, e^{\beta x}$ белгилөөлөрүн негизинде (5) формуласын

$\int P_n(x)\, e^{\beta x}\, dx = \frac{1}{\beta}\, e^{\beta x} \cdot P_n(x) - \frac{1}{\beta}\int e^{\beta x}\, P_n{}'(x)dx$ көрүнүштө жазып, акыркы интегралда

$du = d\left[P_n{}^{(n)}(x)\right] = Adx -$ теңдештиги орун алганга чейин, же

$n -$кадамга чейин бөлүктөп интегралдоону уланта беребиз (A – const.). Мисалы:

$$11)\ \int (x^2 + 2x)\ e^x\, dx = \left| \begin{matrix} u = P_2(x) = x^2 + 2x \Rightarrow du = 2(x+1)dx, \\ dv = e^x\, dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= (x^2 + 2x)\, e^x - 2\int (x+1)\, e^x dx = \left| \begin{matrix} \text{экинчи кадам} \\ u = P_2{}'(x) = 2(x+1) \Rightarrow \\ du = d[P_2{}'(x)] = P_2{}''(x)dx = \\ = 2dx, \\ dv = e^x\, dx \Rightarrow v = e^x \end{matrix} \right| =$$

$$= (x^2 + 2x)\, e^x - 2[(x+1)\, e^x - \int e^x dx] = (x^2 + 2x)\, e^x -$$

$$-2(x+1)\, e^x + 2\, e^x + C = x^2 e^x + C.$$

Б$_5$) $\int P_n(x) \sin \beta x\, dx$ $\left(\int P_n(x) \cos \beta x\, dx\right)$ интегралдарын эсептөөдө

$u = P_n(x) \Rightarrow du = P_n{}'(x)dx$ жана $dv = \sin \beta x\, dx \ \Rightarrow v = -\frac{\cos \beta x}{\beta}$

$\left(dv = \cos \beta x\, dx \ \Rightarrow v = \frac{\sin \beta x}{\beta}\right)$ белгилөөлөрүн жардамы менен,

$$\int P_n(x) \sin \beta x\, dx = -P_n(x)\ \frac{\cos \beta x}{\beta} + \frac{1}{\beta}\int P_n{}'(x) \cos \beta x\, dx$$

$$\left(\int P_n(x) \cos \beta x\, dx = P_n(x)\ \frac{\sin \beta x}{\beta} - \frac{1}{\beta}\int P_n{}'(x) \sin \beta x\, dx\right)$$

n жолу бөлүктөп интегралдоо усулун, же $du = d\left[P_n{}^{(n)}(x)\right] = Adx$ көрүнүшкө келгенче чейин кайталоо менен бөлүктөп интегралдоо формулаларын алабыз. Кадамдардын акырында берилген интеграл

$$\int \sin \beta x \, dx = -\frac{\cos \beta x}{\beta} \quad \left(\int \cos \beta x \, dx = \frac{\sin \beta x}{\beta}\right)$$

көрүнүштөгү интегралдарга келтирилип, алардын табылган маанилерин ($Б_5$) интегралына коюу менен эсептөө аягына чыгат. Мисалы:

$$12) \int (x^2-1)\cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} u = P_2(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \\ du = P_2{}'(x)dx = 2xdx, \\ dv = \cos x \, dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2-1)\sin x - \int \sin x \, 2xdx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{экинчи кадам} \\ u = P_2{}'(x) = 2x \Rightarrow du = P_2{}''(x)dx = 2dx, \\ dv = \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= (x^2-1)\sin x - [-2x\cos x + 2\int \cos x \, dx]$$

$$= (x^2-1)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C =$$

$$= (x^2-3)\sin x + 2x\cos x + C \,.$$

Бөлүктөп интегралдоонун (5) эрежесин жогоруда каралган ($Б_1$), ($Б_2$), ($Б_3$), ($Б_4$), ($Б_5$) учурларында гана колдонууга болот деп чектөөгө болбойт. (5) эрежесин колдонуудан кийин, интеграл таблицалык көрүнүшкө келе турган абалга карай жөнөкөйлөсө, анда бөлүктөп интегралдоо усулун колдоно беребиз. Мисалы: Биринчи кадамда

$$13) \int \frac{xdx}{sin^2 x} = \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx, \\ dv = \frac{dx}{sin^2 x} \Rightarrow v = -\text{ctg}\, x \end{array} \right| = -x\text{ctg}\, x + \int \text{ctg}\, x \, dx.$$

ээ болуп, акыркы интегралды

$$\int \text{ctg}\, x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \text{ деп белгилесек,} \\ d\,t = \cos x \, dx \end{array} \right| = \int \frac{d\,t}{t} =$$

$= \ln|t| + \mathrm{C} = \ln|\sin x| + \mathrm{C}$ көрүнүштө эсептеп,

$\int \frac{xdx}{sin^2 x} = -x\text{ctg}\, x + \ln|\sin x| + \mathrm{C}$ жообун табабыз.

§11.3 Айрым функцияларды интегралдоо усулдары

11.3.1 Рационалдык функцияларды интегралдоо

$\boldsymbol{R(x)} = \frac{\boldsymbol{P_n(x)}}{\boldsymbol{Q_m(x)}}$ көрүнүштөгү рационалдык функция берилип, алымы $n-$тартиптеги

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ ... + a_{n-1}x + a_n \ (x \in R, \forall i: a_i \in R)$, бөлүмү

$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ ... + b_{m-1}x + b_m \qquad (x \in R, \forall i: b_i \in R)$ $m-$ тартиптеги көп мүчөлөр болушсун. Эгерде 1) $n < m$ болсо, рационалдык функция – “*дурус бөлчөк*”;

2) $n \geq m$ болсо, рационалдык функция – “*буруш бөлчөк*” көрүнүштөрдө берилген деп эсептейбиз.

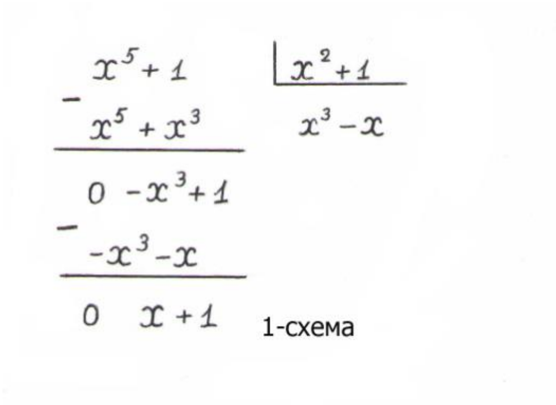
$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-$рационалдык функциясы буруш бөлчөк болсо, анда $P_n(x)$ көп мүчөсүн $Q_m(x)$ көп мүчөсүнө бөлүү менен, буруш бөлчөктү

$R(x) = P_{n-m}(x) + \frac{\widetilde{K(x)}}{Q_m(x)}$ көрүнүштөгү $(n-m)-$ тартиптеги $P_{n-m}(x)-$ тийинди көп мүчөсү менен, $\widetilde{K(x)}-$ бөлүүнүн калдыгы катышкан $\frac{\widetilde{K(x)}}{Q_m(x)}-$ дурус бөлчөгүн суммасына ажыратып жазууга болот. Ошентип, бардык рационалдык функцияларды интегралдоо маселесин, көп мүчөнү жана дурус бөлчөк көрүнүштөгү рационалдык функцияны интегралдоо маселесине алып келүүгө болот деген чечимге келебиз. Мисалы,

$P_5(x) = x^5 + 1\,, Q_2(x) = x^2 + 1$ болгон $\frac{P_5(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^5+1}{x^2+1} \quad (n = 5 \geq m = 2)$ буруш бөлчөк көрүнүштөгү рационалдык функцияны 1 – схема боюнча бөлүп, $P_3(x) = x^3 - x$ тийинди көп мүчөсү менен, алымы $\widetilde{K(x)} = x + 1$ калдык мүчө болгон дурус бөлчөктүн суммасына

ажыратып жазууга $\frac{P_5(x)}{Q_2(x)} = \frac{x^5+1}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x+1}{x^2+1}$ болот.

$m \leq 2$ болгон учурлар үчүн, рационалдык $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ функциясынан $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ интеграл алууга токтололу:



1-схема

1 −*учур* : $m = 1$ болуп, бөлүмүндө $Q_1(x) = b_0 x + b_1$ көрүнүштөгү көп мүчө турсун дейли. Эгерде $n \geq 1$ болсо, анда интеграл алдындагы рационалдык функция буруш бөлчөк болгондуктан, бөлүүдөн кийин

$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-1}(x) + \frac{a_0}{b_0 x + b_1}$ көрүнүшкө келип, эсептөөнү талап кылган интеграл

$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int P_{n-1}(x)\, dx + \int \frac{a_0}{b_0 x + b_1} dx$ көрүнүштө жазылат.

$(n-1) -$ тартиптеги $P_{n-1}(x) -$ көп мүчөсүн таблица боюнча интегралдоого болот, ал эми экинчи интегралды

$$\int \frac{a_0}{b_0 x + b_1} dx = \left| \begin{matrix} t = b_0 x + b_1 \, , \\ dt = d(b_0 x + b_1) \end{matrix} \right| = \frac{a_0}{b_0} \int \frac{d(b_0 x + b_1)}{b_0 x + b_1} =$$

$= \frac{a_0}{b_0} \int \frac{dt}{t} = \frac{a_0}{b_0} \ln|t| + \mathrm{C} = \frac{a_0}{b_0} \ln|b_0 x + b_1| + \mathrm{C}$ эсептеп, берилген интегралды

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx = \int P_{n-1}(x) dx + \int \frac{a_0}{b_0 x + b_1} dx =$$

$$= \int P_{n-1}(x)\, dx + \frac{a_0}{b_0} \ln|b_0 x + b_1| + \mathrm{C} \qquad (6)$$

акырына чейин эсептей алабыз. Мисалы:

1) $\int \frac{x^4 - 7x + 11}{x-2} dx = \left| \begin{matrix} 2 - \text{схема} \\ \text{боюнча бөлсөк} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \left[x^3 + 2x^2 + 4x + 1 + \frac{13}{x-2} \right] dx =$$

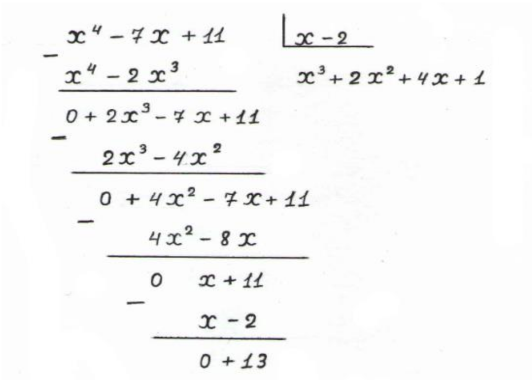
$$= \int x^3 dx + 2 \int x^2\, dx + 4 \int x\, dx + \int dx + 13 \int \frac{dx}{x-2} = \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} +$$

$+x+13\int\frac{d(x-2)}{x-2}=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+2x^2+x+13\ln|x-2|+C$.

$$2)\int\frac{x^3}{x+1}dx=\left|\begin{array}{l}3-\text{схема боюнча бөлсөк,}\\ \frac{x^3}{x+1}=x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\end{array}\right|=$$

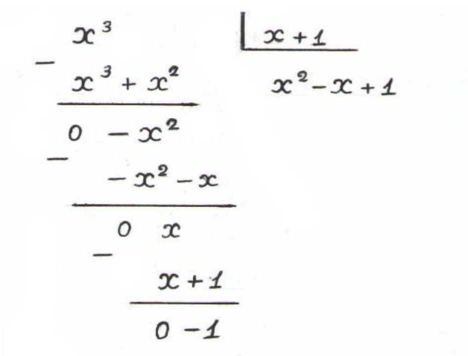
$$=\int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+1|+C\,.$$


2-схема

Эгерде $n=0$ болсо, интеграл алдындагы рационалдык функция дурус бөлчөк болгондуктан, аны бөлбөстөн эле интегралдоого болот.

2 – *учур* : $m=2$ болгон учурда, рационалдык функциянын бөлүмүндө $Q_2(x)=b_0x^2+b_1x+b_2$ көрүнүштөгү көп мүчө турсун


3-схема

($b_0x^2+b_1x+b_2=0$ *теңдемесин чыныгы чечимдери жашабаган учур каралат*). Эгерде $n\geq 2$ болсо, анда рационалдык функция буруш бөлчөк болуп, анын алымын бөлүмүнө бөлүү менен дурус бөлчөккө айлантсак,

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=P_{n-2}(x)+\frac{a_0x+a_1}{b_0x^2+b_1x+b_2}$$

көрүнүшкө келип, $(n-2)-$ тартиптеги $P_{n-2}(x)$ көп мүчөсү менен дурус бөлчөктүн суммасына ажырайт. Анда $\int R(x)dx$ интегралын эсептөө, ажыралыштагы экинчи кошулуучунун интегралын эсептөө маселесине келет. Экинчи кошулуучуну да мүчөлөп бөлүп, анын интегралын ажыратып жазып

$\int\frac{a_0x+a_1}{b_0x^2+b_1x+b_2}dx=a_0\int\frac{x\,dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}+a_1\int\frac{dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}$, ар бирин өз өзүнчө эсептейли:

а) $a_0\int\frac{x\,dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}=\frac{a_0}{2b_0}\int\frac{(2b_0x+b_1-b_1)dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}=$

$$=\frac{a_0}{2b_0}\left[\int\frac{d\left(b_0x^2+b_1x+b_2\right)dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}-b_1\int\frac{dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}\right]=\frac{a_0}{2b_0}\ln|b_0x^2+b_1x+b_2|-$$

$-\frac{b_1a_0}{2b_0}\int\frac{dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}$. Акыркы интеграл төмөмөндөгүдөй эсептелет;

б) $$\int\frac{dx}{b_0x^2+b_1x+b_2}=\left|\begin{array}{c}\text{квадраттык үч}\\ \text{мүчөнүн толук}\\ \text{квадратын ажыратсак}\end{array}\right|=\frac{1}{b_0}\int\frac{dx}{x^2+\frac{b_1}{b_0}x+\frac{b_2}{b_0}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}p=\frac{b_1}{b_0},\\ q=\frac{b_2}{b_0}\end{array}\right|=\frac{1}{b_0}\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{b_0}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{b_0}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}=\left|\begin{array}{c}t=x+\frac{p}{2}\Rightarrow dt=dx,\\ a^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2,\\ a=\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}\end{array}\right|=\frac{1}{b_0}\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=\frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=\frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{b_2}{b_0}-\left(\frac{b_1}{2b_0}\right)^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{b_2}{b_0}-\left(\frac{b_1}{2b_0}\right)^2}}.$$

2 – учурда рационалдык функциянын интегралын

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\int P_{n-2}(x)dx+\int\frac{a_0x+a_1}{b_0x^2+b_1x+b_2}dx=\int P_{n-2}(x)dx+$$

$$+\frac{a_0}{2b_0}\ln|b_0x^2+b_1x+b_2|+$$

$$+\left(a_1-\frac{b_1a_0}{2b_0}\right)\left[\frac{1}{b_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{b_2}{b_0}-\left(\frac{b_1}{2b_0}\right)^2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{b_2}{b_0}-\left(\frac{b_1}{2b_0}\right)^2}}\right]+C \qquad (7)$$

көрүнүштө эсептөөгө болот.

Мисалы, 3) $\int\frac{3x+4}{2x^2+2x+5}dx=3\int\frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}+4\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}$ интеграл алдындагы функцияны мүчөлөп бөлүп, берилген интегралды эки интегралдын суммасы катарында жазып эсептейли:

а) $3\int\frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}=\frac{3}{4}\int\frac{(4x+2-2)\,dx}{2x^2+2x+5}=\frac{3}{4}\left[\int\frac{(4x+2)\,dx}{2x^2+2x+5}-2\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}\right]=$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{d(2x^2+2x+5)}{2x^2+2x+5}-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{2\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+5-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)}=\frac{3}{4}\ln|2x^2+2x+5|-$$

$$-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}=\left|\begin{matrix}t=x+\frac{1}{2},\\ dx=dt\\ a^2=\frac{19}{4}\end{matrix}\right|=\frac{3}{4}\ln|2x^2+2x+5|-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{a^2+t^2}=$$

$$=\frac{3}{4}\ln|2x^2+2x+5|-\frac{3}{4a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=\frac{3}{4}\ln|2x^2+2x+5|-$$

$$-\frac{3}{4\cdot\sqrt{\frac{19}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{19}{4}}}\right)=\frac{3}{4}\ln|2x^2+2x+5|-\frac{3}{2\sqrt{19}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right).$$

Жогоруда эсептелген $2\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}$ - интегралын маанисин пайдаланып, экинчи кошулуучу интегралды

б) $4\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}=2\cdot\left(2\int\frac{dx}{2x^2+2x+5}\right)=2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{19}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)\right)=$

$=\frac{4}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)$ табабыз.

Демек, берилген интеграл $\int\frac{3x+4}{2x^2+2x+5}dx=\frac{3}{4}\ln|2x^2+2x+5|+$

$+\left[\frac{4}{\sqrt{19}}-\frac{3}{2\sqrt{19}}\right]\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)+\text{C}=\frac{3}{4}\ln|2x^2+2x+5|+$

$+\frac{5}{2\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)+\text{C}$ көрүнүштө эсептелет.

Жалпы учурдагы рационалдык функциядан интеграл алуу усулдарын көрсөтөбүз. Сызыктуу $x-b$ жана x^2+px+q квадраттык үч мүчөсүн *жөнөкөй көбөйтүүчүлөр* деп атап ($x^2+px+q\neq 0$ же чыныгы тамырлары жок, б.а. $D=\frac{p^2}{4}-q<0$), дурус бөлчөктүн $Q_m(x)$ бөлүмүн жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө жана алардын бүтүн даражаларына

$$Q_m(x)=(x-a)^{\alpha}\cdot(x-b)^{\beta}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}\quad(8)$$

көрүнүштө ажыратууга мүмкүн болгон учурларга токтолобуз

$(\alpha, \beta, \mu, s \in N;\ a, b, p, q \in R)$.

Берилген $Q_m(x)$ көп мүчөсүн (8) сыяктуу көбөйтүүчүлөргө ажыратуу эки жол менен ишке ашырылат:

1) Көп мүчөнү алгебралык өзгөртүп түзүүлөр менен;

2) Көп мүчөнүн нөлдөрүн же $Q_m(x) = 0$ теңдемесин

$a, b, \ldots$ сыяктуу чечимдерин таап, $Q_m(x)$ көп мүчөсүн $(x - a)$

жана $(x - b)$ сыяктуу туюнтмаларга бөлүү менен.

11.3.2 Жөнөкөй же элементардык бөлчөктөрдү интегралдоо

11.3 Аныктама. I. $\frac{A}{x-a}$, II. $\frac{A}{(x-a)^k}$, III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ *көрүнүштөрдөгү рационалдык функцияларды жөнөкөй же элементардык бөлчөктөр деп атайбыз.*

Мында $A, N, M, a, b, p, q \in R,\ k \in N$ жана $x^2 + px + q = 0$ теңдемеси чыныгы тамырларга ээ болбойт, же анын дискримианты $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ терс деп алынат.

11.1 Теорема. *Эгерде* $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *рационалдык функциясын бөлүмүндөгү* $Q_m(x)$ *көп мүчөсүн жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө ажыратып,* (8) *көрүнүштө жазууга мүмкүн болсо, анда* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *бөлчөгүн* I – IV *көрүнүштөгү жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы катарында ажыратып жазууга болот, б.а.*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \ldots + \frac{M_{\mu_s}x+N_{\mu_s}}{\left(x^2+p_{\mu_s}x+q_{\mu_s}\right)^{\mu_s}} \qquad (9)$$

теңдештиги орун алат.

►(9) ажырылыштагы

$$A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_{\mu_s}, N_{\mu_s} \quad (10)$$

коэффициенттери, кандайдыр бир белгисиз турактуу чыныгы сандар, же айрымдары нөл санына барабар болушу да мүмкүн. Аларды аныктоо үчүн, (9) теңдештигин оң жагын жалпы бөлүмгө келтирип, бөлчөктөрдү кошуу амалын аткарабыз. Жалпы бөлүм (8) көрүнүштө ажыраган $Q_m(x)$ көп мүчөсү болгондуктан, (9) теңдештигин эки жагында турган бөлчөктөрдүн бөлүмдөрүнүн тең экендигигин жана теңдештик туура аткарылышы үчүн, алымдарын да теңдөө шартын коюу керек экендигин сезебиз. Коюлган шартты аткаруу үчүн, (9) дун оң жагындагы бөлчөктөрдү кошуудан кийин пайда болгон бөлчөктүн алымы менен сол жагындагы бөлчөктүн алымы болгон $P_n(x)$ көп мүчөсүнүн коэфициенттерин x тин бирдей даражаларына карата теңдештирип, белгисиз (10) коэффициенттерине карата алгебралык сызыктуу теңдемелер системасын түзөбүз. Түзүлгөн теңдемелер системасын чечимдерин таап, (9) ажыралышынын туура экендигине ишенебиз. ◄

(9) көрүнүштөгү ажыралышты пайдаланып, $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$ интегралын эсептөө усулу **анык эмес коэффициенттер ыкмасы** деп аталат.

4. Мисал:

4) $\int \frac{x+2}{x^2+8x+7} dx$ интегралын эсептөө үчүн, рационалдык функциянын бөлүмүндөгү көп мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратабыз.
$x^2 + 8x + 7 = 0$ теңдемесин чыгарып, квадраттык үч мүчөнүн эки $-1, -7$ чечимдерин таап, аны $x^2 + 8x + 7 = (x + 1)(x + 7)$ көрүнүштөгү көбөйтүүчүлөргө ажыратсак, рационалдык функцияны (9) көрүнүштөгү жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы катарында жазып, анык эмес коэффициенттер усулун колдонууга мүмкүнчүлүк түзүлөт. Ал үчүн

$$\frac{x+2}{x^2+8x+7} = \frac{\mathrm{A}}{x+1} + \frac{\mathrm{B}}{x+7} = \frac{\mathrm{A}(x+7)+\mathrm{B}(x+1)}{(x+1)(x+7)} = \frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})x+7\mathrm{A}+\mathrm{B}}{(x+1)(x+7)}$$

теңдештигин аткарылышын талап кылабыз. Анын бөлүмдөрү барабар болгондуктан, алымдарындагы коэффициенттерди x тин бирдей

даражаларына карата теңдеп $x+2=(\mathrm{A}+\mathrm{B})x+7\mathrm{A}+\mathrm{B}$, ⇨ $\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}=1\,,\\ 7\mathrm{A}+\mathrm{B}=2\end{cases}$ алгебралык теңдемелер системасына ээ болобуз. Мындан $\begin{cases}\mathrm{A}=\frac{1}{6}\,,\\ \mathrm{B}=-\frac{5}{6}\end{cases}$ белгисиз коэффициенттерин аныктап, рационалдык функцияны

$\frac{x+2}{x^2+8x+7}=\frac{\frac{1}{6}}{x+1}+\frac{-\frac{5}{6}}{x+7}$ көрүнүштөгү жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасына ажырарын көрүп, берилген интегралды

$$\int\frac{x+2}{x^2+8x+7}dx=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x+7}=\frac{1}{6}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\frac{5}{6}\int\frac{d(x+7)}{x+7}=$$

$$=\begin{vmatrix}t=x+1, dt=dx;\\ \tau=x+7, d\tau=dx\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t}-\frac{5}{6}\int\frac{d\tau}{\tau}==\frac{1}{6}\ln|t|-\frac{5}{6}\ln|\tau|+C=$$

$=\frac{1}{6}\ln|x+1|-\frac{5}{6}\ln|x+7|\ +\ \mathrm{C}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{(x+7)^5}\right|\ +\ \mathrm{C}$ эсептейбиз.

5) $\int\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}dx$ интегралын эсептейли.

Рационалдык функциянын бөлүмүндөгү көп мүчөнү

$Q_3(x)=x^3-3x^2+2x=x\,(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$ көбөйтүүчүлөргө ажыратып, рационалдык фунцияны жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы катарында жазып, анык эмес коэффициенттер усулун колдонобуз. Анда

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}}{x-1}+\frac{\mathrm{C}}{x-2}=\frac{\mathrm{A}(x-1)(x-2)+\mathrm{B}\,x\,(x-2)+\mathrm{C}\,x\,(x-1)}{x^3-3x^2+2x}=$$

$$=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})x^2+(-3\mathrm{A}-2\mathrm{B}-\mathrm{C})x+2\mathrm{A}}{x^3-3x^2+2x}$$

теңдештигин алымдарын теңдештирип,

$$3x^2-6x+2=(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})x^2+(-3\mathrm{A}-2\mathrm{B}-\mathrm{C})x+2\mathrm{A}$$

белгисиз A, B, C коэффициентерине карата

$$\begin{cases}\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=3,\\ -3\mathrm{A}-2\mathrm{B}-\mathrm{C}=-6,\\ 2\mathrm{A}=2\,.\end{cases}$$

түзүлгөн теңдемелер системасынын $\mathrm{A} = 1,\ \mathrm{B} = 1,\ \mathrm{C} = 1$ чечимдерин таап, интеграл алдындагы рационалдык функцияны

$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ көрүнүштө жазууга болоруна ишенебиз.

Анда берилген интеграл $\int \frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x} dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} =$

$= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x-2)}{x-2} = \ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x-2| + \mathrm{C} =$

$= \ln|x(x-1)(x-2)| + \mathrm{C} = \ln|x^3 - 3x^2 + 2x| + \mathrm{C}$ маанисине ээ болот.

6) $\int \frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} dx$ интегралын эсептейли.

Рационалдык функциянын бөлүмүндө турган 5 – тартипеги

$Q_5(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2$ көп мүчөнү өзгөртүп түзүп, жөнөкөй

$$x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 = x^2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = x^2(x+1)^3$$

көбөйтүүчүлөргө ажыратып, аны (9) сыяктуу жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы көрүнүштө жазсак,

$$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} = \frac{\mathrm{A}_1}{x} + \frac{\mathrm{A}_2}{x^2} + \frac{\mathrm{B}_1}{x+1} + \frac{\mathrm{B}_2}{(x+1)^2} + \frac{\mathrm{B}_3}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{\mathrm{A}_1 x\,(x+1)^3 + \mathrm{A}_2(x+1)^3 + \mathrm{B}_1 x^2(x+1)^2 + \mathrm{B}_2\, x^2(x+1) + \mathrm{B}_3 x^2}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} =$$

$$= \frac{(\mathrm{A}_1+\mathrm{B}_1)x^4 + (3\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+2\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2)x^3 + (3\mathrm{A}_1+3\mathrm{A}_2+\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2+\mathrm{B}_3)x^2 + (\mathrm{A}_1+3\mathrm{A}_2)x + \mathrm{A}_2}{x^5+3x^4+3x^3+x^2}$$

теңдештигине ээ болобуз. Бөлчөктүн бөлүмдөрү тең болгондуктан, теңдештиктин аткарылышы үчүн алымдарын теңдеп:

$$x^3 + 3x + 1 = (\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1)x^4 + (3\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + 2\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2)x^3 +$$

$$+(3\mathrm{A}_1 + 3\mathrm{A}_2 + \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \mathrm{B}_3)x^2 + (\mathrm{A}_1 + 3\mathrm{A}_2)x + \mathrm{A}_2\,,$$

x тин даражалары боюнча коэффициенттерди теңдегенде, белгисиз коэффициенттерге карата

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 0\,, \\ 3A_1 + A_2 + 2B_1 + B_2 = 1\,, \\ 3A_1 + 3A_2 + B_1 + B_2 + B_3 = 0\,, \\ A_1 + 3A_2 = 3\,, \\ A_2 = 1 \end{cases}$$

алгебралык сызыктуу теңдемелер системасы түзүлөт.

Системанын акыркы экөөсүнөн $A_1 = 0$, $A_2 = 1$; биринчисинен $B_1 = 0$; экинчисинен $B_2 = 0$; үчүнчүсүнөн $B_3 = -3$ маанилерин таап, рационалдык функцияны

$\frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{(x+1)^3}$ көрүнүштөгү жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасына ажырата алабыз. Анда берилген интеграл

$$\int \frac{x^3+3x+1}{x^5+3x^4+3x^3+x^2} dx = \int \frac{dx}{x^2} - 3\int \frac{dx}{(x+1)^3} =$$

$$= \int x^{-2} dx - 3\int (x+1)^{-3} d(x+1) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - \frac{3(x+1)^{-3+1}}{-3+1} + C =$$

$= -\frac{1}{x} + \frac{3}{2(x+1)^2} + C$ маанисине ээ болот.

7) $\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2} dx$ интегралын эсептөө үчүн, интеграл алдындагы рационалдык функцияны жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы катарында ажыратып,

$$\frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2} = \frac{(M_1x+N_1)(x^2+1)+M_2x+N_2}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{M_1x^3+N_1x^2+(M_1+M_2)x+N_1+N_2}{(x^2+1)^2}$$

теңдештигине ээ болобуз. Анын бөлүмдөрү тең болгондуктан, барабардыктын туура аткарылышы үчүн, алымдарын

$x^3 + x^2 + 1 = M_1x^3 + N_1x^2 + (M_1 + M_2)x + N_1 + N_2$ теңдештирип, белгисиз коэффициенттерге карата түзүлгөн

$\begin{cases} M_1 = 1\,, \\ N_1 = 1\,, \\ M_1 + M_2 = 0, \\ N_1 + N_2 = 1 \end{cases}$ теңдемелер системасынан $\begin{cases} M_1 = 1\,, \\ N_1 = 1\,, \\ M_2 = -1, \\ N_2 = 0 \end{cases}$ белгисиз коэффициенттерин аныктайбыз. Андай болсо, жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасынан алынган интеграл

$$\int \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx -$$

$$-\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-2}d(x^2+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \operatorname{arctg} x +$$

$+\frac{1}{2(x^2+1)} + C$ көрүнүштө эсептелет.◄

Ошентип, 11.3 Аныктамада көрсөтүлгөн I , III түрүндөгү жөнөкөй бөлчөктөрдү интегралдоо, 11.1 теореманын негизинде ажыратылган жөнөкөй бөлчөктөрдүн интегралына келтирилип, 1 – 2 учурлардагы (6), (7) формулаларын негизинде, ал эми II түрдөгү жөнөкөй бөлчөктү интегралдоо

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{vmatrix} t = x-a, \\ dt = dx \end{vmatrix} = A\int t^{-k}\,dt = A\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C, \qquad (11)$$

ыкмасы менен ишке ашырыларын көрсөттүк.

11.3.3 $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx$ интегралын эсептөө

11.3 Аныктамасындагы IV − түрдөгү жөнөкөй бөлчөктү интегралдоо үчүн, атайын рекурренттик деп аталган формула келтирип чыгарабыз.

$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx$ интегралын эсептөөдөн мурда бөлүмүн өзүнчө жазып, толук квадратын бөлүп алалы. 11.3 Аныктамада эскертилген шарт боюнча x^2+px+q квадраттык үч мүчөсүнүн дискриминанты $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ терс сан болуп, $x^2+px+q=0$ теңдемесинин чыныгы тамырлары жашабайт же сызыктуу көбөйтүүчүлөргө ажырабайт. Ошондуктан анын

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=$$

$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$ толук квадратын бөлүп алып, берилген интегралды

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\left|\begin{matrix} t=x+\frac{p}{2},\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt, \\ a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} \end{matrix}\right|=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^k}dt=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{M}{2}\int(t^2+a^2)^{-k}\,d(t^2+a^2)+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$$

көрүнүшкө өзгөртө алабыз. Акыркы эсептелбей калган интегралды

$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$ деп белгилеп, төмөндөгүдөй өзгөртүүлөрдү жүргүзсөк

$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}$ же

$$J_k=\frac{1}{a^2}J_{k-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\qquad(12)$$

теңдештигине ээ болобуз. Теңдештиктеги интегралды өзүнчө эсептеп

алалы: $\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{td(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\left|\begin{matrix} \text{бөлүктөп интегралдайлы} \\ u=t\Rightarrow du=dt, \\ dv=\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}\Rightarrow \\ v=\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{matrix}\right|=$

$$=\frac{1}{2a^2}\left[\frac{t}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{(1-k)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right]=\frac{t}{2a^2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{2a^2(1-k)}J_{k-1}\,.$$

Табылган интегралдын маанисин (12) ге коюп, $(1-k)=-(k-1)$ эске алып,

$J_k=\frac{1}{a^2}J_{k-1}+\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2a^2(k-1)}J_{k-1}$, же

$$J_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \cdot J_{k-1} \qquad (13)$$

рекурренттик формуланы табабыз. Аны колдонуп IV ─ түрдөгү жөнөкөй бөлчөктү интегралдоо эрежесин

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\, dx = \frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_k\,, \qquad (14)$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

(13) формулада $k = 1$ болгондо $J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$ табылып, (13) төгү k га улам 2 , $3, \dots, k-1$ маанилерин берип олтуруп $J_2, J_3, \dots, J_{k-1}$ интегралдарын таап, эсептөөнү талап кылган J_k интегралын $J_{k-1}, J_{k-2}, \dots, J_2, J_1$ маанилери менен туюнтабыз. Аныкталган J_k ны (14) кө коюу менен, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\, dx$ интегралын эсептеген болобуз.

Мисал.

8) $\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^3}\, dx$ интегралын эсептейли. Бөлчөктүн бөлүмүндөгү квадраттык үч мүчөнүн чыныгы тамырлары жашабагандыктан,

$D = \frac{p^2}{4} - q = -1 < 0$ болуп, берилген интеграл IV ─ түрдөгү жөнөкөй бөлчөктү интегралдоого мисал болот.

Квараттык үч мүчөдөн

$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2 \cdot 2\, x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1$ толук квадрат бөлүп алып, берилген интегралды

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^3}\, dx = \begin{vmatrix} t = x-2 \\ x = t+2 \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{t+3}{(t^2+1)^3} dt = \int \frac{tdt}{(t^2+1)^3} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} =$$

$$= \begin{vmatrix} J_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} \\ \text{деп белгилеп} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^3} + J_3 = \frac{(-3-1)(t^2+1)^{-3-1}}{2} + J_3 =$$

$= -\frac{2}{(t^2+1)^4} + J_3$ көрүнүшкө келтиребиз. Мындан $k = 3$, $a = 1$ маанилерин (13) рекуррентик формулага коюп

$J_3 = \frac{t}{2(3-1)(t^2+1)^2} + \frac{6-3}{2(3-1)} \cdot J_2 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} J_2$,

экинчи жолу (13) төн $k = 2$ деп,

$J_2 = \frac{t}{2(t^2+1)^1} + \frac{1}{2} \cdot J_1 = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} =$

$= \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t$ ээ болобуз. Андай болсо

$J_3 = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4} \left[\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right] = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3t}{8(t^2+1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t =$

$= \frac{5t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t$

келип чыгып, аны эсептөөнү талап кылган интегралга койсок,

$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^3} \, dx = -\frac{1}{(t^2+1)^4} + J_3 = -\frac{1}{(t^2+1)^4} + \frac{5t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} t + \mathrm{C} =$

$= -\frac{1}{((x-2)^2+1)^4} + \frac{5(x-2)}{4((x-2)^2+1)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} (x-2) + \mathrm{C} =$

$= -\frac{1}{(x^2-4x+5)^4} + \frac{5(x-2)}{4(x^2-4x+5)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} (x-2) + \mathrm{C}$

жообуна ээ болобуз.

11.3. 4 Иррационалдык функциялардан интеграл алуу

$\mathbf{I_1}$) $\int \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x}}, \sqrt[3]{\boldsymbol{x}}, \dots, \sqrt[m]{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{dx}$ **жана** $\int \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \sqrt[m]{\boldsymbol{ax+b}}) \, \boldsymbol{dx}$ сыяктуу интегралдарды эсептөө усулдарын көрсөтөлү.

Интеграл алдындагы функция $\sqrt[m]{x}$ же $\sqrt[m]{ax+b}$ сыяктуу иррационалдык туюнтмаларды кармап турса ($m \in N \wedge m \geq 2$; $a, b \in R; a \neq 0$), анда m ге эселүү болгон сандардын эң кичинеси болгон p бүтүн санын таап, $x = t^p \Leftrightarrow t = \sqrt[p]{x}$ жана

$ax + b = t^p \Leftrightarrow x = \frac{1}{a} t^p - \frac{b}{a}$ белгилөөлөрүн киргизсек, m ге эселүү p саны m ге калдыксыз $\frac{p}{m} = n$ бөлүнгөндүктөн, туюнтмалар

$\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{t^p}=t^{\frac{p}{m}}=t^n$ же $\sqrt[m]{ax+b}=\sqrt[m]{t^p}=t^{\frac{p}{m}}=t^n$ $\left(\frac{p}{m}=n\in N\right)$, тамырдан куткарылып, рационалдык функцияга өзгөртүлүп түзүлөт.

Ошентип, бул учурда иррационалдык функциядан интеграл алуу маселеси t га карата рационалдык функциядан интеграл алууга келтирилип, §11.2 де баяндалган ыкмалар аркылуу жүргүзүлөт.

5. Мисалдар:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ интегралын эсептөө үчүн, тамырлардын көрсөткүчтөрү болгон 2, 3 сандарына эселүү болгон сандардын эң кичинеси катарында $p=6$ санын тандап, $x=t^6\Leftrightarrow t=\sqrt[6]{x}$ белгилөөсүн киргизебиз. Мындан $dx=6t^5dt$ экендигин эске алып, берилген интегралды рационалдык бөлчөк функциядан интеграл алгандай

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5dt}{t^2+t^3}=\int\frac{6t^5dt}{t^2(1+t)}=6\int\frac{t^3dt}{1+t}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{алымын бөлөбүз}\\ \frac{t^3}{(1+t)}=t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\end{matrix}\right|=6\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{1+t}=$$

$$=6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right]-\int\frac{d(1+t)}{1+t}=2t^3-3t^2+6t-\ln|1+t|+\mathrm{C}=$$

$$=2(\sqrt[6]{x})^3-3(\sqrt[6]{x})^2+6\sqrt[6]{x}-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+\mathrm{C}=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+\mathrm{C}$$ эсептейбиз.

2) $$\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx=\left|\begin{matrix}x+4=t^2\Leftrightarrow x=t^2-4\\ dx=2t\,dt,\ t=\sqrt{x+4}\end{matrix}\right|=\int\frac{\sqrt{t^2}}{t^2-4}\cdot 2t\,dt=$$

$$=\int\frac{2\,t^2dt}{t^2-4}=2\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=2\int dt+8\int\frac{dt}{t^2-4}=2t+8\int\frac{dt}{(t-2)(t+2)}.$$

Акыркы интеграл алдындагы туюнтманы жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасына ажыратып, анык эмес коэффициенттер усулун колдонобуз

$$\frac{1}{(t-2)(t+2)}=\frac{\mathrm{A}}{t-2}+\frac{\mathrm{B}}{t+2}=\frac{\mathrm{A}(t+2)+\mathrm{B}(t-2)}{(t-2)(t+2)}=\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})t+2\mathrm{A}-2\mathrm{B}}{(t-2)(t+2)}.$$

Эгерде акыркы теңдештик орун алса, анда бөлүмдөрү тең болгондуктан, алымдарындагы коэффициенттерди t нын бирдей даражаларына карата теңдештирип,

$\begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B}=0, \\ 2\mathrm{A}-2\mathrm{B}=1 \end{cases}$ теңдемелер системасынан $\mathrm{A} = \frac{1}{4}$, $\mathrm{B} = -\frac{1}{4}$ коэффициенттерин аныктайбыз. Анда

$$\int \frac{dt}{(t-2)(t+2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|t-2| - \frac{1}{4}\ln|t+2| + \mathrm{C} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + \mathrm{C}$$

келип чыгып, берилген интегралдын

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx = 2t + 8\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + \mathrm{C} = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

жообу алынат.

$\mathbf{I_2}$) $\int \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{x},\ \sqrt[m]{\frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{cx}+\mathrm{p}}}\right)\boldsymbol{dx}$ – интегралын эсептөө үчүн, $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+\mathrm{p}}}$ белгилөөсүн киригизсек $(x, a, b, c, \mathrm{p} \in R,\ \frac{a}{c} \neq \frac{b}{p};\ \ m \in N\ \wedge m \geq 2)$,

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+\mathrm{p}} \Rightarrow (cx+\mathrm{p})t^m = ax+b \Rightarrow (a-ct^m)x = \mathrm{p}t^m - b$$

теңдештигинен

$x = \frac{\mathrm{p}t^m - b}{a-ct^m}$ табылып, $dx = \frac{pmt^{m-1}(a-ct^m)+cmt^{m-1}(\mathrm{p}t^m-b)}{(a-ct^m)^2}dt =$

$= \frac{(ap-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt$ болот.

Бул маанилерди берилген интегралга коюп, иррационалдык функциянын интегралын

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+\mathrm{p}}}\right)dx = \int R\left(\frac{\mathrm{p}t^m-b}{a-ct^m}, t\right)\frac{(ap-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt = \int R_1(t)\,dt,$$

$R_1(t)$ рационалдык функциясынан интеграл алуу амалына өзгөртүүгө жетишебиз.

Мисал. 3)

$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}} \cdot \frac{dx}{(2x+3)^2} = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}} \Rightarrow t^4(2x+3) = 2x-3, \\ x = \frac{3t^4+3}{2-2t^4} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{1-t^4} - 1\right), \\ 2x+3 = \frac{6}{1-t^4}, \ \ dx = \frac{12t^3 dt}{(1-t^4)^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int t \cdot \left(\frac{1-t^4}{6}\right)^2 \cdot \frac{12t^3}{(1-t^4)^2} dt = \frac{1}{3}\int t^4\, dt = \frac{1}{15}t^5 + C = \frac{1}{15}\sqrt[4]{\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^5} + C\,.$$

$$4)\ \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \left| \begin{array}{c} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow t^3(x-1) = x+1, \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} = \frac{t^3-1+2}{t^3-1} = 1 + \frac{2}{t^3-1}, \\ dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right| =$$

$= -\int t \cdot \frac{1}{\left(2+\frac{2}{t^3-1}\right)} \cdot \frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} = -3\int \frac{dt}{t^3-1} = -3\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}$ келип чыгып, аны анык эмес коэффициенттер усулу боюнча эсептейбиз.

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{Mt+N}{t^2+t+1} = \frac{A(t^2+t+1)+(Mt+N)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$= \frac{(A+M)t^2+(A-M+N)t+A-N}{(t-1)(t^2+t+1)} -$ теңдештигинде бөлүмдөрү тең, ал эми алымдарындагы коэффициенттерди t нын бирдей даражаларына карата теңдеп, белгисиз коэффициенттерге карата

$$\begin{cases} A+M=0, \\ A-M+N=0, \\ A-N=1 \end{cases}$$

сызыктуу теңдемелер системасын түзөбүз. Анын $A = \frac{1}{3}$, $M = -\frac{1}{3}$, $N = -\frac{2}{3}$ чечимдерин таап, акыркы интегралды жөнөкөй бөлчөктөрдүн интегралдарына ажыратып,

$$-3\int \frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = -3\int \frac{\frac{1}{3}dt}{t-1} - 3\int \frac{-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}}{t^2+t+1}dt = -\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{t+1}{t^2+t+1}dt =$$

$$= -\int \frac{d(t-1)}{t-1} + \frac{1}{2}\int \frac{(2t+1)+1}{t^2+t+1}dt = -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[2\ln|t-1| - \ln|t^2+t+1|\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{C} =$$

$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$ эсептеп чыгабыз. Анда берилген интеграл $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1} = \left|\begin{matrix}\text{Мында} \\ t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\end{matrix}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$ маанисине ээ болот.

11.3.5 Эйлердин ордуна коюулары (подстановкалары)

I_3) $\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$ – көрүнүштөгү иррационалдык өзгөрүлмөлөрдү кармаган функциялардан интеграл алууда, Эйлердин төмөндөгүдөй үч ыкмаларын колдонуу ыңгайлуу болот.

1 – ыкма: Эгерде $\boldsymbol{a} > 0$ болсо, $\boldsymbol{\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\cdot x}$ белгилөөсүн же ордуна коюусун киргизип, түзүлгөн теңдештикти бузбоо үчүн эки жагын тең квадратка көтөрөп, x ти t аркылуу туюнтсак,

$$ax^2+bx+c = (t-\sqrt{a}\cdot x)^2 \Rightarrow ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx + ax^2 \Rightarrow$$

$$bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx \Rightarrow \left(2\sqrt{a}\,t+b\right)x = t^2 - c \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b},$$

$$dx = \frac{2t\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)-(t^2-c)2\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)^2}dt = 2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\cdot x = t - \sqrt{a}\cdot\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}$$

маанилерин табабыз. Табылган маанилерди $\mathbf{I_3}$ интегралына койсок, $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx =$

$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\,\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\,\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)^2} dt$ интеграл алдындагы функция, иррационалдык өзгөрүлмөлөрдөн куткарылып, t өзгөрүлмөсүнө карата

$$R_1(t) = R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\,\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\,\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)^2}$$

көрүнүштөгү рационалдык функцияга айланып, $\mathbf{I_3}$ интегралы рационалдык функциялардан интеграл алууга келтирилет.

2 – ыкма: $ax^2 + bx + c = 0$ теңдемесин дискриминанты оң

$D = b^2 - 4ac > 0$ болуп, ар түрдүү эки чыныгы x_1, x_2 чечимдерге ээ болсун, б.а. $ax^2 + bx + c = a\,(\,x - x_1\,)(\,x - x_2\,)$ көбөйтүүчүлөрүнө ажырасын. Бул учурда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1) \cdot t$ ордуна коюусун пайдаланабыз (белгилөөдө x_1, x_2 чыныгы чечимдердин каалаган бири тандалат). Белгилөө теңдештигин эки жагын тең квадратка көтөрүп, теңдештик бузулбагандыктан

$$ax^2 + bx + c = (x - x_1)^2 t^2 \Leftrightarrow a(x - x_1)(\,x - x_2) = (x - x_1)^2\, t^2 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; a(\,x - x_2) = (x - x_1)t^2 \Rightarrow x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a}$ жана

$$dx = \frac{2tx_1(t^2-a) - 2t(x_1 t^2 - a x_2)}{(t^2-a)^2} dt =$$

$= \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2-a)^2} dt, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \left(\frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a} - x_1\right) t = \frac{a(x_1 - x_2)\,t}{t^2 - a}$ маанилерин аныктап $\mathbf{I_3}$ интегралына койсок, иррационалдык функциядан интеграл алуу маселеси рационалдык функциядан

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \int R_1(t)\, dt -$ интеграл алуу маселесине өзгөрүп, жогоруда белгилүү болгон усулдар менен эсептөө мүмкүнчүлүгү түзүлөт. Мында

$R_1(t) = R\left(\frac{a(x_1 - x_2)\,t}{t^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)\,t}{t^2 - a}\right) \frac{2a(x_2 - x_1)t}{(t^2-a)^2}$ көрүнүштөгү рационалдык функция.

3 – ыкма: Эгерде бош мүчө с > 0 болсо, анда

$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt-\sqrt{c}$ ордуна коюусун киргизип, эки жагын тең квадратка көтөрсөк, теңдештик өзгөрбөгөндүктөн

$$ax^2+bx+c = t^2x^2-2xt\sqrt{c}+c \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; ax^2+bx = t^2x^2-2xt\sqrt{c} \;\Rightarrow ax+b = t^2x-2t\sqrt{c} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{b+2t\sqrt{c}}{t^2-a},\; dx = \frac{2\sqrt{c}\,(t^2-a)-2t(b+2t\sqrt{c})}{(t^2-a)^2}dt = -2\cdot\frac{t^2\sqrt{c}+tb+a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}dt\,,$$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{b+2t\sqrt{c}}{t^2-a}\cdot t - \sqrt{c} = \frac{t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c}}{t^2-a}$ маанилерине ээ болобуз. Бул табылган маанилерди $\mathbf{I_3}$ интегралына коюп,

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right) = R\left(\frac{b+2t\sqrt{c}}{t^2-a},\frac{t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c}}{t^2-a}\right)\cdot(-2)\cdot\frac{t^2\sqrt{c}+tb+a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}$$

иррационалдык функциянын интегралын, t га карата рационалдык функциядан интеграл алуу эрежесине келтиребиз.

6. Мисалдар:

5) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{4x^2+4x+3}}$ интегралын эсепейли. $a=4>0$ болгондуктан Эйлердин **1** – ыкмасын колдонуп,

$\sqrt{4x^2+4x+3} = t-\sqrt{4}\cdot x$ белгилөөсүн киргизебиз. Белгилөөнүн эки жагын тең квадратка көтөрүп, $4x^2+4x+3 = t^2-2\cdot2tx+4x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; 4x+3 = t^2-2\cdot2tx \;\Rightarrow\; x = \frac{t^2-3}{4(1+t)},\;\; dx = \frac{t^2+2t+3}{4(1+t)^2}dt\,,$$

$\sqrt{4x^2+4x+3} = t-2\cdot x = t-2\cdot\frac{t^2-3}{4(\,t+1)} = \frac{t^2+2t+3}{2\,(t+1)}$ маанилерин берилген интегралга койсок,

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{4x^2+4x+3}} = \int\frac{\frac{t^2+2t+3}{4(1+t)^2}}{\frac{t^2-3}{4(1+t)}\cdot\frac{t^2+2t+3}{2\,(t+1)}}dt = 2\int\frac{dt}{t^2-3} = 2\int\frac{dt}{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\left[\frac{1}{t-\sqrt{3}}-\frac{1}{t+\sqrt{3}}\right]dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\int\frac{d(t-\sqrt{3})}{t-\sqrt{3}}-\int\frac{d(t+\sqrt{3})}{t+\sqrt{3}}\right] =$$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\left|t-\sqrt{3}\right|-\ln\left|t+\sqrt{3}\right|+C\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C$ келип чыгат. Мында

$\sqrt{4x^2+4x+3} = t-\sqrt{4}\cdot x \;\Leftrightarrow\; t = \sqrt{4x^2+4x+3}+2\cdot x$ болгондуктан,

$\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+4x+3}\ +2\cdot x\ -\ \sqrt{3}}{\sqrt{4x^2+4x+3}\ +\ 2\cdot x\ +\ \sqrt{3}}\right| + C$ жообуна ээ болобуз, ал эми $\frac{1}{\sqrt{3}}$C санын кайра эле C деп жаздык, анткени каалагандай C турактуу санына кандай санды көбөйтсөк да, каалагандай турактуу сан бойдон кала берет.

6) $\int \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{1+x-x^2}}$ интегралын эсептейли, ал үчүн

$a = -1 < 0\,, c = 1 > 0$ эске алып, Эйлердин **3** – ыкмасын колдонобуз, б.а. $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$ ордуна коюусун киргизип, анын эки жагын тең квадратка көтөрсөк теңдештик бузулбагандыктан,

$1 + x - x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1 \Leftrightarrow x - x^2 = t^2x^2 - 2tx \Rightarrow$

$x(1-x) = x(t^2x - 2t) \Rightarrow 1 - x = t^2x - 2t;$

$x = \frac{1+2t}{t^2+1},\quad dx = -\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}dt\,,\quad \sqrt{1+x-x^2} = tx - 1 = t\cdot\frac{1+2t}{t^2+1} - 1 =$

$= \frac{t+2t^2-t^2-1}{t^2+1} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}$ маанилерин таап, берилген интегралга коёбуз

$$\int \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{-\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2}}{\left(1+\frac{1+2t}{t^2+1}\right)\cdot\frac{t^2+t-1}{t^2+1}}\,dt = -2\int\frac{dt}{t^2+1+1+2t} = -2\int\frac{dt}{1+(t+1)^2} =$$

$$= -2\int\frac{d(1+t)}{1+(t+1)^2} = -\,2\,\mathrm{arctg}(1+t) + \mathrm{C} =$$

$$= -2\,\mathrm{arctg}\left(1 + \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + \mathrm{C} = -2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right) + \mathrm{C}\,.$$

Мында $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1 \Rightarrow t = \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x}$ экендиги эске алынды.

7) $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$ интегралында $x^2 + 2x = 0$ теңдемеси эки $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ чечимдерине ээ, ошондуктан Эйлердин **2** – ыкмасын колдонууга болот. $\sqrt{x^2+2x} = t(x-0) \equiv tx$ белгилөөсүн киргизип, квадратка көтөрүп

$x^2 + 2x = t^2x^2 \Rightarrow x + 2 = t^2x \Rightarrow x = \frac{2}{t^2-1} \Rightarrow$

$dx = -\frac{4tdt}{(t^2-1)^2}$, $\sqrt{x^2+2x} = tx = \frac{2t}{t^2-1}$, $x - 1 = \frac{2}{t^2-1} - 1 = \frac{3-t^2}{t^2-1}$,

$t = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$ маанилерин аныктайбыз. Берилген интегралга табылган маанилерди коюп, аны

$$\int \frac{(x-1)dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} = -\int \frac{\frac{3-t^2}{t^2-1}\cdot\frac{4t}{(t^2-1)^2}}{\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)^2\cdot\frac{2t}{t^2-1}}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{3-t^2}{t^2}\,dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int dt =$$

$$= \frac{3}{2\,t} + \frac{1}{2}\,t + C = \frac{3x}{2\,\sqrt{x^2+2x}} + \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x} + \ C$$ көрүнүштө эсептейбиз.

$\mathbf{I_4}$) $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ сыяктуу интегралдарды

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} \ + \ \lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (15)$$

көрүнүштө ажыратып эсептөө усулун колдонобуз. Мында $P_n(x)$, $n-$ тартиптеги берилген көп мүчө, ал эми $Q_{n-1}(x)$, $(n-1)-$ тартиптеги коэффициенттери белгисиз көп мүчө, λ болсо кандайдыр бир белгисиз сан. Белгисиз болушкан λ санын жана $Q_{n-1}(x)$ көп мүчөсүнүн коэффициенттерин аныктоо үчүн (15) теңдештигин дифференцирлеп, жалпы бөлүмгө келтирген соң алымдарында пайда болгон көп мүчөлөрдүн коэффициенттерин x тин бирдей даражаларына карата теңдейбиз. Натыйжада, белгисиздерге карата алгебралык сызыктуу теңдемелер системасы түзүлүп, анын табылган чечимдерин (15) ке коюп, экинчи кошулуучу интегралды жогорудагы $\mathbf{I_1 - I_3}$ ыкмалары менен, болбосо тригонометриялык ордуна коюулар менен эсептей алабыз.

Ошондой эле, $\int \frac{dx}{(x-\text{p})^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ көрүнүштөгү интегралдарды да

$t = \frac{1}{x-\text{p}}$ ордуна коюсунун жардамы менен $\mathbf{I_4}$ интегралына өзгөртүүгө болот. Мисалы, 8) $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$ интегралын эсептөөдө $t = \frac{1}{x-1}$ деп белгилесек, анда $x = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$ болуп, берилген интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} = \int \frac{t^3\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+3\left(1+\frac{1}{t}\right)+1}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{\frac{t^2+2t+1+3t^2+3t+t^2}{t^2}}} =$$

$= -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$ көрүнүшкө келет. (15) формуласын пайдаланып, акыркы интегралды

$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (A\,t+B)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$ көрүнүштө ажыратып, эки жагын тең дифференцирлеп

$$\frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = A\cdot\sqrt{5t^2+5t+1} + (A\,t+B)\frac{10t+5}{2\sqrt{5t^2+5t+1}} + \lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{5t^2+5t+1}}, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \frac{2A\left(5t^2+5t+1\right) + (A\,t+B)(10t+5) + 2\lambda}{2\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

жалпы бөлүмгө келтиргенден кийин, алымдарындагы коэффициенттерди t нын бирдей даражаларына карата теңдеп,

$$2\,t^2 = 20A\,t^2 + (15A+10B)\,t + (2A+5B+2\lambda)$$

алгебралык

$\begin{cases} 20A = 2, \\ 15A+10B = 0, \\ 2A+5B+2\lambda = 0 \end{cases}$ сызыктуу теңдемелер системасын түзөбүз. Анын чечимдерин $A = \frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{20}$, $\lambda = \frac{11}{40}$ таап,

$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \left(\frac{t}{10}-\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{11}{40}\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$ ээ болобуз.

Акыркы интегралды эсептейли: $\int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{20}}} =$

$$= \left| \begin{matrix} u = t+\frac{1}{2}, du = dt \\ a^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{20}}\right)^2 \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C.$$

Эсептелген интегралдын маанисин жана белгилөөлөрдү эске алып, баштапкы интегралды

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}} = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = \left(\frac{3}{20}-\frac{t}{10}\right)\sqrt{5t^2+5t+1} -$$

$$-\frac{11}{40}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\,\right|\right] + \ C = \left|\begin{array}{c} t=\frac{1}{x-1}\,, \\ u=t+\frac{1}{2}= \\ =\frac{x+1}{2(x-1)} \\ \text{деп алынган} \end{array}\right| =$$

$$= \left(\frac{3}{20}-\frac{1}{10\,(x-1)}\right)\sqrt{\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{5}{x-1}+1} -$$

$$-\frac{11}{40}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+1}{2(x-1)}+\sqrt{\left(\frac{x+1}{2(x-1)}\right)^2-\frac{1}{20}}\right|\right] + \ C = \frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1} -$$

$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{5}+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right| + \ C$ көрүнүштө эсептей алабыз.

11.3.6 Айрым тригонометриялык функцияларды интегралдоо

Интеграл алдындагы функция $\sin x$ менен $\cos x$ өзгөрүлмөлөрүнө карата рационалдык функция болгон, б.а. $\sin x, \cos x$ тамыр алдында (иррационалдык) катышпаган учурларды карайлы.

T_1) $\int \boldsymbol{R(\sin x, \cos x)dx}$ –интегралын, $-\pi < x < \pi$ болгон учурда универсалдык деп атлган $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ белгилөөсүн жардамы менен тригонометриялык функциялар катышпаган, өзгөрүлмөлөрү чыныгы сандар болгон рационалдык функциялардан интеграл алуу маселесине келтирүүгө болот. Чынында эле бул белгилөөнү пайдаланып, интеграл алдындагы $R(\sin x, \cos x)$ рационалдык функцияны

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,t}{1+t^2}\,,\ \ \cos x = \frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

көрүнүштө жазып, интеграл алынуучу туюнтмага

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ \ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \qquad (15)$$

белгилөөлөрүн киргизүү менен $\sin x,\ \cos x$ катышпаган, өзгөрүлмөлөрү t чыныгы сандары болгон $R_1(t)$ – рационалдык функциясына өзгөртүп түзүүгө болоруна күбө болобуз

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\ dt\ .$$

7. Мисалдар:

1) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}dx$ интегралы **T_1** көрүнүштө болгондуктан, универсалдык $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ордуна коюусун колдонобуз. Анда берилген интегралды (15) тин негизинде

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x\,(1+\cos x)}dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2+2t}{2t(1+t^2+1-t^2)}\cdot 2dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+1}{t}dt = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{t^2}{4}+t+\frac{1}{2}\ln|t| + C =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$ эсептөөгө болот.

T_2) $\int \boldsymbol{R(\sin x)\ \cos x\,dx}$ – интегралы $t = \sin x$, $dt = d(\sin x)$ ордуна коюуларынын жардамы менен t өзгөрүлмөсүнө карата

$(-1 \le t \le 1, x \in R)$,

$$\int R(\sin x)\ \cos x\ dx = \int R(\sin x)\ d(\sin x) = \int R(t)\,dt$$

рационалдык функциядан интеграл алууга келтирилет. Мисалы,

2) $$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt = d(\sin x) = \cos x\,dx\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{2} + C.$$

T_3) $\int \boldsymbol{R(\cos x)\sin x\,dx}$ –сыяктуу интегралдар $t = \cos x$,

$dt = -d(\cos x)$ ордуна коюуларын негизинде,

$$\int R(\cos x)\ \sin x\ dx = -\int R(\cos x)\ d(\cos x) = -\int R(t)\,dt$$

көрүнүштөгү t өзгөрүлмөсүнө карата рационалдык функциядан интеграл алууга өзгөртүлүп түзүлөт $(-1 \le t \le 1, x \in R)$.

3) $\int \frac{\sin x}{3+5\cos x} dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x\,, \\ dt = -d(\cos x) = \sin x\, dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{3+5t} = \frac{1}{5} \int \frac{d\left(\frac{3}{5}+t\right)}{\frac{3}{5}+t} =$

$= \frac{1}{5} \ln\left|\frac{3}{5} + t\right| + C = \frac{1}{5} \ln\left|\frac{3}{5} + \cos x\right| + C$.

T$_4$) Интеграл алдында $\sin x, \cos x$ өзгөрүлмөлөрүнө карата $R(\sin x, \cos x) -$ рационалдык функциясында $\sin x$ менен $\cos x$ тин жалаң жуп даражалары катышышса, анда $\int R(\sin x, \cos x) dx$ интегралын эсептөөдө универсалдлык $t = tg\, x$ ордуна коюусун пайдалануу ыңгайлуу болот. Бул учурда $t = tg\, x \Rightarrow x = \text{arctg}\, t$ жана $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ болгондуктан, $sin^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x+sin^2x} = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$,

$cos^2x = \frac{cos^2x}{cos^2x+sin^2x} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$ теңдештиктерин пайдаланып, берилген интегралды

$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\, dt,$

t өзгөрүлмөсүнө карата рационалдык функциядан интеграл алуу маселесине келтиребиз. Мисалы,

4) $\int \frac{\sin^4 x}{cos^6 x}\, dx = \int \text{tg}^4 x \cdot \frac{dx}{cos^2 x} = \int \text{tg}^4 x\;\; d(tg\, x) = |t = tg\, x\,| = \int t^4\, dt =$

$= \frac{t^5}{5} + \text{C} = \frac{\text{tg}^5 x}{5} + \text{C}$.

5) $\int \frac{dx}{sin^2x + 4cos^2x + 2} = \left| \begin{matrix} t = tg\, x \text{ деп} \\ \text{белгилесек,} \\ x = \text{arctg}\, t \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+t^2} + 2} = \int \frac{dt}{3t^2 + 6} =$

$= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + \text{C} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{arctg}\left(\frac{tg\, x}{\sqrt{2}}\right) + \text{C}$.

T$_5$) $\int \boldsymbol{\sin mx \cos nx\, dx}, \int \boldsymbol{\sin mx \sin nx\, dx}, \int \boldsymbol{\cos mx \cos nx\, dx}$

$(m, n \in Z)$ көрүнүштөгү интегралдарды эсептөөдө

$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\, [\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$,

$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\ [\cos(m-n)\,x - \cos(m+n)x]$,

$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

тригонометриялык формулаларын колдонуп көбөйтүндүлөрдү сумма катары жазсак, анда T_5 интегралы таблицалык интегралга же болбосо жогоруда каралган $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_4$ интегралдарын бирөөсүнө келтирилет. Мисалы,

6) $\int sin\,6x\,cos\,4x\ dx = \frac{1}{2}\int[\sin(6-4)x + \sin(6+4)x]\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int[\sin 2x + \sin 10x]\,dx = \frac{1}{4}\int sin\,2x\,d(2x) + \frac{1}{20}\int \sin 10x\ \ d(10x) =$

$= -\frac{1}{4}cos\,2x - \frac{1}{20}cos\,10x + \mathrm{C}$.

$\mathrm{T}_{\mathbf{6}}$) $\int \mathbf{sin}^{\alpha}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{cos}^{\beta}\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{dx}$ интегралын эсептөө $\alpha,\ \beta$ көрсөткүчтөрүн кандай сандар болгонуна жараша жүргүзүлөт:

a) α, β сандарын бирөөсү оң так сан болуп, экинчиси каалагандай чыныгы сан болсун дейли. Айталы $\beta = 2k+1$ $(k > 0, k \in Z)$ оң так сан, ал эми $\alpha \in R$ болсун, анда $\mathrm{T}_{\mathbf{6}}$ интегралын $t = sin\,x$ ордуна коюусун жардамы менен

$$\int \sin^{\alpha}x\,cos^{\beta}x\,dx = \int \sin^{\alpha}x\,cos^{2k+1}x\,dx =$$

$$= \int \sin^{\alpha}x\,cos^{2k}x\ \cdot cos\,x\,dx = \int \sin^{\alpha}x\,(cos^2x)^k \cdot\ d(sin\,x)$$

$$= \left|\begin{matrix} cos^2x = 1 - sin^2x \\ \text{жана}\ \ t = \sin x \\ \text{деп ордуна койсок} \end{matrix}\right| = \int t^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (1-t^2)^k\,dt$$

интегралына өзгөртө алабыз. Ньютондун биному боюнча $1 - t^2$ айырмасын $k-$ даражага көтөрүп, t^{α} га көбөйткөн соң интегралдын таблицасын тике колдонуп, $\mathrm{T}_{\mathbf{6}}$ интегралын эсептөөнү акырына жеткиребиз. Эгерде α так сан болсо, $t = \cos x$ ордуна коюусу пайдаланылат.

b) α, β сандарын экөөсү тең оң жуп сандар болушсун, анда аларды $\alpha = 2n$, $\beta = 2k$ $\ (n, k \in N)$ көрүнүштөрдө жазсак, $n \neq k$ болгондо $\mathrm{T}_{\mathbf{6}}$ интегралын

$\int \sin^{\alpha}x\, cos^{\beta}x\, dx = \int \sin^{2n}x\, cos^{2k}x\, dx = \int (sin^2x)^n\, (cos^2x)^k dx =$

$$= \left| \begin{matrix} sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \\ cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}\ (*) \\ \text{формулаларын эстеп} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2^{n+k}} \int (1-\ cos\, 2x)^n (1+\ cos\, 2x)^k\, dx$$

абалына өзгөртөбүз. Мындан Ньютондун б916ому боюнча $1-\ cos\, 2x$ айырмасын $n-$ даражага, $1+\ cos\, 2x$ суммасын $k-$ даражага көтөрүп, андан кийин мүчөлөп көбөйтүп, интеграл алдында $cos\, 2x$ тин даржаларынан турган көп мүчөнү алабыз. Эгерде $cos\, 2x$ тин даражалары так сан болсо, анда интегралды $\boldsymbol{a}) -$учурдагы ыкма менен, ал эми жуп сан болсо $(*)$ тригонометриялык формуласын жардамы менен ошол жуп сандан мурда келген $cos\, 4x$ тин так даражасына төмөндөтүп, анын так даражаларын $\boldsymbol{a})$ боюнча эсептеп, жуп даражаларын $(*)$ ны колдонуп $cos\, 8x$ тин так даражаларына айлантып ж.б.у.с. процессти улантып, акырында $cos\, 2x$ тин даражаларын төмөндөтүп олтуруп биринчи даражадагы $cos\, 2mx$ тен $(m \in N)$ алынуучу $\int cos\, 2mx\, dx$ көрүнүштөгү интегралга келип, интегралдоону аягына чыгарабыз.

$n = k$ болгондо, $\sin x \cdot cos\, x = \frac{1}{2} \sin 2x$ формуласын пайдаланып,

$$\int \sin^{2n} x \cdot\ cos^{2n} x\, dx = \int (\sin x \cdot cos\, x)^{2n}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^{2n} dx =$$

$$= \frac{1}{4^n} \int (\sin^2 2\, x)^n\, dx = \frac{1}{4^n} \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^n dx = \frac{1}{8^n} \int (1-\ cos\, 4x)^n\, dx$$

интегралына ээ болобуз. Андан кийин Ньютондун биному боюнча $1-\ cos\, 4x$ айырмасын $n-$ даражага көтөрүп, $cos\, 4x$ тин даражаларынан турган көп мүчөнү жогоруда $n \neq k$ учуруда баяндалган ыкма менен интегралдай алабыз.

Мисалдар:

$$7)\ \int \sin^5 x \sqrt{cos\, x}\, dx = \left| \begin{matrix} \alpha = 5 \text{ так сан,} \\ \beta = \frac{1}{2} \text{ эркин} \\ \text{сан.} \boldsymbol{a}) - \text{учуру} \end{matrix} \right| = \int (\sin^2 x)^2 \sin x \sqrt{cos\, x}\, dx =$$

$= -\int (1 - cos^2 x)^2 \, (cos\, x)^{\frac{1}{2}} \; d(cos\, x) = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ \text{дейбиз} \end{matrix} \right| = -\int (1 - t^2)^2 \, dt =$

$$= -\int (1 - 2t^2 + t^4)\, t^{\frac{1}{2}}\, dt = -\int \left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}} \right) dt =$$

$= -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}\, t^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}} \; + \; \text{C} = -\frac{2}{3} (\cos x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}\, (\cos x)^{\frac{7}{2}} -$

$-\frac{2}{11} (\cos x)^{\frac{11}{2}} + \text{C}\, .$

8) $\int \frac{cos^3 x}{\sin^2 x}\; dx = \left| \begin{matrix} \text{даражалардын} \\ \text{бири } \beta = 3 \text{ так} \\ \text{сан. } \boldsymbol{a}) - \text{учуру} \end{matrix} \right| = \int \frac{cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \cos x\, dx =$

$= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}\; d(\sin x) = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ \text{дейбиз} \end{matrix} \right| = \int \frac{1 - t^2}{t^2} dt = \int \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt =$

$= -\frac{1}{t} - t + \text{C} = -\frac{1}{\sin x} - \sin x \; + \text{C}\, .$

9) $\int \sin^4 x \cdot \, cos^2\, x\, dx = \left| \begin{matrix} \alpha = 4,\; \beta = 2 \text{ жуп} \\ \text{сандар. } b) - \text{учур} \end{matrix} \right| = \int \left(\frac{1 - cos\, 2x}{2} \right)^2 \frac{1 + cos\, 2x}{2} dx =$

$= \frac{1}{2^3} \int (1 - \; cos\, 2x)(1 - \; cos\, 2x)(1 + \; cos\, 2x) dx =$

$= \frac{1}{2^3} \int (1 - \; cos\, 2x)(1 - cos^2 2x) dx = \frac{1}{2^3} \int (1 - cos\, 2x - cos^2 2x +$
$+ \; cos^3 2x) dx =$

$= \frac{1}{2^3} \int \left[1 - cos\, 2x - \frac{1 + cos\, 4x}{2} + (1 - \sin^2 2\, x) cos\, 2x \right] dx =$

$= \; \frac{1}{2^3} \left[\int dx - \frac{1}{2} \int cos\, 2x \;\; d(2x) - \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{8} \int cos\, 4x \;\; d(4x) \right] \; +$

$+ \; \frac{1}{2^4} \int (1 - \sin^2 2\, x)\; d(\sin 2x) = \frac{1}{2^3} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x \right] +$

$+ \frac{1}{2^4} \left[\sin 2x - \frac{\sin^3 2\, x}{3} \right] \; + C \; = \frac{x}{2^4} - \frac{\sin 4x}{2^6} - \frac{\sin^3 2\, x}{2^4 \cdot 3} \; + \;\; C \; .$

I$_5$) $\int \boldsymbol{R_1}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{1 - x^2}}\right) \boldsymbol{dx}, \;\; \int \boldsymbol{R_2}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{x^2 - 1}}\right) \boldsymbol{dx}, \;\; \int \boldsymbol{R_3}\left(\boldsymbol{x}, \sqrt{\boldsymbol{1 + x^2}}\right) \boldsymbol{dx}$ көрүнүштөгү квадраттык иррационалдуулуктарды интегралдоонун кошумча усулдары катарында, төмөндөгүдөй ордуна коюуларды айтууга болот: Биринчи интегралды эсептөөдө $x = \sin t$, ал эми экинчисинде $\frac{1}{x} = \sin t$, үчүнчүсүндө болсо $x = \text{tg}\, t$ белгилөөлөрүн

киргизип, $\mathbf{I_5}$ интегралын $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$ көрүнүштөгү $\sin t, \cos t$ тригонометриялык функцияларга карата түзүлгөн рационалдык функциялардан интеграл алуу амалына келтирип, жогоруда каралган $\mathrm{T_1 - T_6}$ ыкмаларды колдонобуз. Мисалы

10) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\ \ x} = -\int \frac{-\frac{dx}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\ \ x} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \frac{1}{x} = \sin t\,, \\ -\frac{dx}{x^2} = \cos t\, dt \\ \text{ордуна койсок} \\ \left(t = arcsin\ \frac{1}{x}\right) \end{matrix} \right| = -\int \frac{\cos t\, dt}{(1+sin^2 t)\sqrt{1-sin^2 t}\cdot\frac{1}{\sin t}} = -\int \frac{\cos t\ \sin t\, dt}{(1+sin^2 t)\cos t} =$$

$$= -\int \frac{\sin t\, dt}{1+sin^2 t} = \int \frac{d(\cos t)}{2-\ cos^2 t} = \left| \begin{matrix} u = \cos t\,, \\ \text{деп белгилеп} \end{matrix} \right| = \int \frac{du}{2-u^2} = \int \frac{du}{(\sqrt{2}-u)(\sqrt{2}+u)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int \frac{du}{\sqrt{2}-u} + \int \frac{du}{\sqrt{2}+u}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\int \frac{d(\sqrt{2}-u)}{\sqrt{2}-u} + \int \frac{d(\sqrt{2}+u)}{\sqrt{2}+u}\right] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right| +$$

$$+ C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\ cost}{\sqrt{2}-\ cost}\right| +\ \ \mathrm{C} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\ \cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}-\ \cos\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)}\right|\ +\ \ C.$$

11) $$\int \sqrt{x^2-2x+2}\, dx = \int \sqrt{(x-1)^2+1}\, dx = \left| \begin{matrix} u = x-1, \\ du = dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \sqrt{u^2+1}\, du = \left| \begin{matrix} u = \mathrm{tg}\, t, \\ du = \frac{dt}{cos^2 t} \\ (t = \mathrm{arctg}\, u) \end{matrix} \right| = \int \sqrt{\mathrm{tg}^2 t + 1}\ \frac{dt}{cos^2 t} =$$

$$= \int \sqrt{\frac{sin^2 t + cos^2 t}{cos^2 t}}\frac{dt}{cos^2 t} = \int \frac{dt}{cos^3 t} = \int \frac{\cos t\, dt}{cos^4 t} = \int \frac{d(\sin t)}{(1-sin^2 t)^2} = \left| \begin{matrix} \mathrm{p} = \sin t \\ \text{дейли} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{d\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p}^2)^2} = \int \frac{d\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})^2(1+\mathrm{p})^2}$$ келип чыгат. Акыркы интеграл алдындагы функцияны жөнөкөй бөлчөктөргө ажыратып,

$$\frac{1}{(1-\mathrm{p})^2(1+\mathrm{p})^2} = \frac{\mathrm{A}}{1-\mathrm{p}} + \frac{\mathrm{B}}{(1-\mathrm{p})^2} + \frac{\mathrm{C}}{1+\mathrm{p}} + \frac{D}{(1+\mathrm{p})^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{A}\left(1+\mathrm{p}-\mathrm{p}^2-\mathrm{p}^3\right) + \mathrm{B}\left(1+2\mathrm{p}+\mathrm{p}^2\right) + \mathrm{C}\left(1-\mathrm{p}-\mathrm{p}^2+\mathrm{p}^3\right) + D\,(1-2\mathrm{p}+\mathrm{p}^2)}{(1-\mathrm{p})^2\,(1+\mathrm{p})^2} =$$

$$= \frac{(-\mathrm{A}+\mathrm{C})\,\mathrm{p}^3 + (-\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}+D)\,\mathrm{p}^2 + (\mathrm{A}+2\mathrm{B}-\mathrm{C}-2D)\,\mathrm{p} + (\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+D)}{(1-\mathrm{p})^2\,(1+\mathrm{p})^2}$$

теңдештигине ээ болобуз. Бөлүмдөрү тең болгондуктан алымдарындагы коэффициенттерди р нын бирдей даражаларына карата

теңдеп: $\begin{cases} -\mathrm{A}+\mathrm{C}=0, \\ -\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}+D=0, \\ \mathrm{A}+2\mathrm{B}-\mathrm{C}-2D=0, \\ \mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+D=1, \end{cases}$ белгисиз коэффициенттерге карата

алгебралык сызыктуу теңдемелер системасын түзөбүз. Анын $\mathrm{A}=-\frac{1}{4}$, $\mathrm{B}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{C}=-\frac{1}{4}$, $D=\frac{1}{4}$ чечимдерин таап, акыркы интегралды жөнөкөй бөлчөктөрдүн интегралдарынын суммасы катарында,

$$\int\frac{d\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})^2(1+\mathrm{p})^2} = -\frac{1}{4}\int\frac{d\mathrm{p}}{1-\mathrm{p}} + \frac{1}{4}\int\frac{d\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})^2} - \frac{1}{4}\int\frac{d\mathrm{p}}{1+\mathrm{p}} + \frac{1}{4}\int\frac{d\mathrm{p}}{(1+\mathrm{p})^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{d(1-\mathrm{p})}{1-\mathrm{p}} - \frac{1}{4}\int\frac{d(1-\mathrm{p})}{(1-\mathrm{p})^2} - \frac{1}{4}\int\frac{d(1+\mathrm{p})}{1+\mathrm{p}} + \frac{1}{4}\int\frac{d(1+\mathrm{p})}{(1+\mathrm{p})^2} = \frac{1}{4}\ln|1-\mathrm{p}| + \frac{1}{4(1-\mathrm{p})} -$$

$$-\frac{1}{4}\ln|1+\mathrm{p}| - \frac{1}{4(1+\mathrm{p})} + \mathrm{C} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\mathrm{p}}{1+\mathrm{p}}\right| + \frac{\mathrm{p}}{2(1-\mathrm{p}^2)} + \mathrm{C}$$

көрүнүштө эсептей алабыз.

Ордуна коюуларды жана белгилөөлөрдү эске алып, берилген интегралдын

$$\int\sqrt{x^2-2x+2}\,dx = \left|\begin{matrix}\mathrm{p}=\sin t \\ \text{дегенбиз}\end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right| + \frac{\sin t}{2(1-\sin^2 t)} + \mathrm{C} =$$

$$= \left|\begin{matrix} t=\mathrm{arctg}\,u, \\ u=x-1 \text{ деп} \\ \text{белиленген}\end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\sin[\mathrm{arctg}\,(x-1)]}{1+\sin[\mathrm{arctg}\,(x-1)]}\right| + \frac{sin[\mathrm{arctg}\,(x-1)]}{2(1-sin^2[\mathrm{arctg}\,(x-1)])} + \mathrm{C}$$

көрүнүштөгү жообун жазабыз.

Көнүгүүлөр

1) Төмөндөгү функциялардын анык эмес интегралдарын эсептегиле:

а) $\int(3-x^2)^3dx$; б) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$; в) $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$;

г) $\int\frac{x^3+3}{x^2-1}dx$; д) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; е) $\int\sqrt{1+\sin 2x}\ dx$;

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; з) $\int \frac{dx}{3+3x^2}$; и) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$;

к) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. Жооптору : а) $27x - 9x^3 + \frac{9x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$; б) $\frac{x^2+7}{7\sqrt[4]{x}}$

в) $\ln|x| - \frac{1}{4x^4}$; г) $x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$; д) $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

e) $(-\cos x + \sin x)sgn(\cos x + \sin x)$; ж) $-\frac{2\sqrt{2-5x}}{5}$; з) $\frac{arctg\sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{6}}$;

и) $\frac{\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|}{\sqrt{3}}$; к) $tg\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

2) Өзгөрүлмөлөрүн алмаштыруу менен эсептегиле:

а) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$; б) $\int \frac{xdx}{4+x^4}$; в) $\int xe^{-x^2}\,dx$;

г) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$; д) $\int \frac{arctg\,x}{1+x^2}dx$; е) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$;

Жооптору: а) $\frac{(1+x^3)^{\frac{4}{3}}}{4}$; б) $\frac{arctg\,\frac{x^2}{2}}{4}$; в) $-\frac{e^{-x^2}}{2}$; г) $\frac{3\sqrt[3]{1-\sin 2x}}{2}$;

д) $\frac{(arctg\,x)^2}{2}$; е) $\frac{1}{4}ln^2\frac{1+x}{1-x}$.

3) Ордуна коюулар менен эсептегиле: а) $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$;

б) $\int cos^5x\sqrt{\sin x}\,dx$; в) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$; е) $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$ $\left(x = \frac{a}{\cos 2t}\right.$ деп ал$\left.\right)$;

Жооптору: а) $-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$; б) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}sin^2x + \frac{2}{11}sin^4x\right)\sqrt{\sin^3 x}$;

в) $\frac{x\sqrt{a^2-x^2}+a^2arcsin\frac{x}{a}}{2}$; г) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$; д) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$;

е) $\sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}\right)$, эгерде $x > a$ болсо;

$-\sqrt{x^2-a^2} + 2a\ln\left(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}\right)$, эгерде $x < -a$ болсо.

4) Бөлүктөп интегралдоо ыкмасы менен эсептегиле:

а) $\int \sqrt{x}\, ln^2 x dx$; б) $\int x^3\, e^{-x^2} dx$; в) $\int x^2 \sin 2x\, dx$;

г) $\int x\,(arctg\ x)^3 dx$; д) $\int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$; е) $\int e^{2x}\, sin^2 x dx$;

Жооптору: а) $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right)$; б) $-\frac{(x^2+1)\, e^{-x^2}}{2}$;

в) $\frac{1-2x^2}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$; г) $\frac{(1+x^2)(arctg\ x)^2 - x\ arctg\ x + \ln(1+x^2)}{2}$;

д) $\sqrt{1+x^2} \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - x$; е) $\frac{e^{2x}(2-\sin 2x - \cos 2x)}{8}$;

5) Рационалдык функциялардын интегралдарын эсептегиле:

а) $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$; б) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$; в) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;

г) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; д) $\int \frac{dx}{x^6+1}$; е) $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}}$; ж) $\int \frac{x^{11} dx}{x^8+3x^4+2}$;

з) $\int \frac{(1-x^7)\, dx}{(1+x^7)x}$; и) $\int \frac{(x^5-x)\, dx}{x^8+1}$; к) $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{x^4+x^2+1}$;

Жооптору: а) $\ln|x-2| + \ln|x+5|$; б) $x + \frac{\ln|x|}{6} - \frac{9 \ln|x-2|}{2} + \frac{28 \ln|x-3|}{3}$;

в) $-\frac{1}{x-2} - arctg(x-2)$; г) $\frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2} arctg\ x$;

д) $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} arctg\ x + \frac{1}{6} arctg\ x^3$; е) $-\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} -$

$- \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}}$; ж) $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$; з) $\frac{1}{7} \ln \frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}$;

и) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-\sqrt{2}\, x^2+1}{x^4+\sqrt{2}\, x^2+1}$; к) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ arctg \frac{x^2-1}{\sqrt{3}\, x}$.

6) Иррационалдык функциялардын интегралдарын эсептегиле:

а) $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$; б) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

г) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$; д) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$; е) $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx$;

ж) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$; з) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; и) $\int \frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$;

к) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$; л) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$;

Жooптору: а) $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2((1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[6]{x}))^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}arctg\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$;

б) $\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|}{2}$; в) $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$; г) $\frac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}-$

$-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$; д) $-\ln\left(\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right)$;

е) $R+\ln(x+1+R)-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|$, мында $R=\sqrt{x^2+x+2}$;

ж) $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$;

з) $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$; и) $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}arctg\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-$

$-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$; к) $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$; л) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|, t=x-\frac{1}{x}$ белгилөөсүн киргизегиле.

7) Тригонметриялык функцияларды интегралдагыла:

а) $\int sin^6x\,dx$; б) $\int sin^2x\ cos^4x\,dx$; в) $\int tg^2x\,dx$;

г) $\int\frac{dx}{\sqrt{sin^3x\,cos^5x}}$; д) $\int\frac{dx}{\sqrt{tg\,x}}$; е) $\int\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$;

ж) $\int sin^3 2x\ cos^2 3x\,dx$; з) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;

и) $\int\frac{sin^2x\,dx}{1+sin^2x}$; к) $\int\frac{\sin x\,dx}{sin^3x+cos^3x}$.

Жooптору: а) $\frac{5x}{6}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\ sin^3 2x$;

б) $\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\ sin^3 2x$; в) $\frac{1}{4}\ tg^4x-\frac{1}{2}\ tg^2x-\ln|\cos x|$;

г) $-2\sqrt{ctg\,x}+\frac{2}{3}\sqrt{\,tg^3x}$; д) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2-z\sqrt{2}+1}{z^2+z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ arctg\ \frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, мында $z=tg\ x$; е) $\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x$; ж) $-\frac{3}{16}\cos 2x+$ $+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{198}\cos 12x$; з) $\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\ \frac{3tg\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$; и) $x-\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}\ tg\ x\right)$; к) $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\ arctg\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin \mathrm{x}}\right)$.

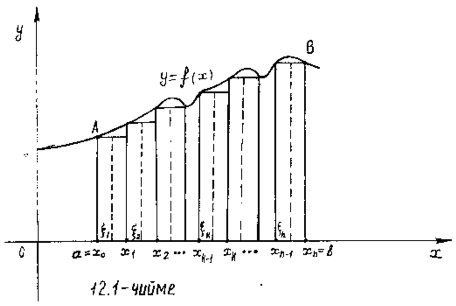
XII ГЛАВА. АНЫК ИНТЕГРАЛДАР

§12.1 Анык интеграл жана анын касиеттери

12.1.1 Анык интеграл түшүнүгүнүн келип чыгуусуна түрткү болгон мисалдар

1. Жалпак фигуранын аянтын эсептөө. R^2 мейкиндигинде (тегиздигинде) жайгашкан фигураларды жалпак фигура деп айтып, алардын арасынан үч бурчтук, төрт бурчтук, трапеция, параллелограмм, тегерек сыяктуу айрым жалпак фигуралардын аянттарын эсептөөчү конкреттүү геометриялык формулалар бар экендигин билебиз. Бирок, математикада интеграл аппараты ойлонулуп табылганга чейин, эркин формадагы жалпак фигуралардын аянттарын эсептөөчү универсалдык формуланы келтирип чыгаруу мүмкүн болгон эмес.

Математикада, интеграл майда бөлүкчөлөрдөгү маалыматтарданураштырып же суммалап жалпы бир бүтүн нерсе жөнүндө маалымат алуучу аппарат катарында колдонулат. Мисалы кайсы бир жалпак фигураны, Oxy координаталар системасында төмөн жагынан Ox огу, каптал жактарынан $x = a,\ x = b$ түздөрү, жогору жагынан $y = f(x)$ функциясын графиги менен чектелип турган ABCD ийри сызыктуу трапециясы катарында сүрөттөө мүмкүн болсун (12.1 – чийме). Мындай фигуранын аянтын эсептөөчү атайын геометриялык формула болбогондуктан, аянтты эсептөөнүн жаңы усулун келтирип чыгаралы.



12.1-чийме

$y = f(x)$ функциясын $[a, b]$ сегментинде аныкталган жана үзгүлтүксүз функция деп эсептеп, берилген $a \leq x \leq b$ аралыгын эркин алынган x_k чекиттери аркылуу n сандагы майда бөлүкчө – кесиндилерге бөлөлү ($k = 0, 1, 2, \ \dots, n$) :

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots \ < x_{n-1} < x_n = b$. Натыйжада $[a, b]$ сегменти, узундуктары $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ болгон $[x_{k-1},\ x_k] -$ бөлүкчөлөргө бөлүнөт. Бул бөлүкчөлөрдүн ар биринен эркин тандалган ξ_k чекиттерин алып бийиктиги $f(\xi_k)$, негизинин узундугу Δx_k болгон тик бурчтуктун

аянтын, ABCD ийри сызыктуу трапециясынын s_k бөлүкчөсүнүн жакындаштырылган аянты $s_k \approx f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$ дейли. Анда бир аз каталык кетирүү менен ABCD ийри сызыктуу трапециясын аянтын, n сандагы бөлүкчө тик бурчтукчалардын жакындаштырып алынган s_k сыяктуу аянтчаларын суммасы

$$S_{ABCD} \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (1)$$

катарында алууга болот. Иш жүзүндө бөлүкчөлөр тик накта тик бурчтук болбостон, жогору жагында $[x_{k-1},\ x_k] -$ бөлүкчөсүнө туура келген $f(x)$ тин графигиндеги жаача турат. Ал эми (1) суммада, жогору жагынан жаачалар менен чектелген бөлүкчөлөрдүн ордуна негизи Δx_k, бийиктиги $f(\xi_k)$ болгон накта тик бурчтукчалар алынып (12.1 – чийме), ийри сызыктуу трапеция, секиче тик бурчтукчалар менен капталган. Ошентип сезилбес каталык кетирүү менен, ABCD ийри сызыктуу трапециянын аянты негизи Δx_k, бийиктиги $f(\xi_k)$ болгон секиче тик бурчтукчалардын аянттарынын суммасы катарында эсептелген.

$[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчө кесиндилерин $\Delta x_k -$ узундуктарын эң чоңун λ деп белгилейли $\lambda = \underbrace{max}_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$. Эгерде λ саны чексиз кичинерсе $\lambda \to 0$, б.а. бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйсө $n \to \infty$, анда бөлүүлөрдөн пайда болгон тик бурчтукчалардын негизи болгон Δx_k да чексиз кичинерип, (1) суммадагы Δx_k негиздерин каптал жактары куушурулуп, бири-бирине жабышкан сызыкчаларга айланып, $\Delta x_k \to 0$ умтулат. Анда ABCD ийри сызыктуу трапециясын аянты, сызыкчалардын суммасыан куралгандай абалды элестетип, $S_{ABCD} -$ ийри сызыктуу трапециясын накта аянтына умтулуп жетет. Демек, берилген ийри сызыктуу трапециянын катасыз аянты деп,

$$S_{ABCD} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (2)$$

суммасын пределдик маанисин түшүнөбүз. Ошондуктан (2) предели кандай учурда жашайт же чектүү мааниге ээ болот, деген суроого жооп берүүдөн мурда, башка бир механикалык маселеге токтолуп өтөбүз.

2. Материалдык чекиттин баскан жолу. Убакыттын $t = t_0$ ирмеминен $t = \mathrm{T}$ убактысына чейинки аралыкта, t убактысына жараша өзгөрүлмө $v = f(t)$ мыйзамы боюнча сызыктуу кыймылда болгон материалдык чекиттин баскан жолунун $S -$ узундугун табалы.

Убакыт өзгөргөн мезгилди $[t_0,\ \mathrm{T}]$ сегменти деп, бул аралыкты n майда бөлүкчө убакыттарга бөлөлү:

$t_0 < t_1 < t_2 < \ \dots\ < t_{n-1}\ < t_n\ = \mathrm{T}$. Айталы, материалдык чекиттин ылдамдыгы убакыттын жетишерлик кичине $[t_{k-1},\ t_k]$ аралыгында сезилерлик өзгөрүп кетпесин. Ошондуктан, сезилбес каталыкка жол коюу менен, материалдык чекиттин ар бир бөлүкчөдөгү орточо ылдамдыгын туруктуу деп эсептеп, ар бир бөлүкчөдөн эркин тандалган τ_k ирмемдеги ылдамдыкты $v_k = f(\tau_k)$ санына барабар деп алалы $(t_{k-1} \le \tau_k \le t_k)$. Андай болсо, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ убагында материалдык чекит анча чоң эмес каталык менен эсептегенде $s_k = f(\tau_k)\Delta t_k$ жолун басып өтөт $(v = \frac{s}{t},\ s = v \cdot t)$. Ал эми, убакыттын $[t_0,\ \mathrm{T}]$ аралыгында жакындаштырылган түрдө

$$S \approx S_n = s_1 + s_2 + \ \dots + s_n = f(\tau_1)\Delta t_1 + \ \dots + f(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k \quad (3)$$

жолду басып өткөн болот.

Убакыттын Δt_k бөлүкчөлөрүн эң узунун $\lambda = \underbrace{max}_{1 \le k \le n} \{\Delta t_k\}$ деп белгилейли, анда $\lambda \to 0$ чексиз кичинерсе , же бөлүүлөрдүн саны чексиз $n \to \infty$ көбөйсө, убакыттын Δt_k бөлүкчөлөрү бул ирмемде чексиз азайып, чекиттин абалына умтулуп келе алат. Бул учурда $v_k = f(\tau_k)$, убакыттын кайсы бир $[t_{k-1},\ t_k]$ аралыгына туура келген орточо ылдамдыкты мүнөздөбөстөн, ар бир τ_k убактысындагы (чекиттик) ылдамдыкты мүнөздөйт. Ал эми жогорудагы сумма, өзгөрүлмө кыймылдагы материалдык чекиттин жолунун накта (катасыз) узундугуна умтулуп жетет.

Ошентип, убакыттын $[t_0,\ \mathrm{T}]$ аралыгында t га карата өзгөрүлмө $v = f(t)$ ылдамдыгы менен кыймылдаган материалдык чекит,

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k) \Delta t_k \qquad (4)$$

(4) пределин S маанисине барабар болгон узундуктагы жолду басып өтөт. Демек (2), (4) пределдери чектүү маанилерге ээ болгон учурда гана, ийри сызыктуу трапециянын жана материалдык чекиттин басып өткөн жолунун универсалдык формулаларын таба алган болобуз.

12.1.2 Анык интегралдын аныктамасы

Жогоруда мисалдарда моделдештирилген ийри сызыктуу трапециянын аянтын жана материалдык чекиттин басып өткөн жолун табуу маселелерин, жалпы эле $[a, b]$ сегментинде аныкталган жана үзгүлтүксүз каалагандай $f(x)$ функциясы $(f(x) \in \mathrm{C}[a, b])$ үчүн жайылталы. $[a, b]$ сегментин x_k чекиттери аркылуу, эркин ыкмада узундуктары $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ болгон n майда бөлүктөргө бөлүп ($k = 1, 2, \dots, n$), ар бир $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчөлөрдүн каалаган жеринен ξ_k чекиттерин ($x_{k-1} \le \xi_k \le\ x_k$) алып, (1), (3) суммаларына окшош

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k \qquad (5)$$

суммасын түзөлү.

Бөлүүлөр эркин ыкмада жүргүзүлүп, ξ_k чекиттери эркин алынгандыктан, ар бир тандоолорго жараша түзүлгөн (5) суммалары ар башка болуп, аларды $f(x)$ функциясын $[a, b]$ аралыгындагы интегралдык суммалары дейбиз. Алардын чоңдугу $[a, b]$ сегментин бөлүү усулуна жана ξ_k чекиттерин тандоого жараша өзгөрүп турушу мүмкүн.

$[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчө кесиндилерин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ узундуктарын эң чоңун λ деп белгилейли $\lambda = \underbrace{max}_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$.

12.1 Аныктама. *Эгерде эркин алынган жетишерлик кичине ε оң санына ылайыкташкан жетишерлик кичине δ оң саны табылып, $[a, b]$ аралыгын кандай ыкма менен n сандагы бөлүктөргө бөлгөнүбүзгө жана $[x_{k-1}, x_k]$ бөлүкчөсүнөн ξ_k чекиттерин кантип тандаганыбызга карабастан, бардык Δx_k узундуктары үчүн*

$$\Delta x_k < \delta \text{ болору менен,} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k - J\right| < \varepsilon$$

шарты аткарылса, анда J санын $f(x)$ функциясынын $[a, b]$ аралыгындагы интегралдык суммаларынын пределдик мааниси деп айтабыз.

Демек, $[a, b]$ аралыгында жетишерлик жакын же бири – биринен δ аралыгынан узак эмес аралыкта жайгашкан бардык x чекиттеринде (5) – интегралдык суммалары, J санынан чексиз кичине ε санына гана айырмаланып турса, анда пределдин аныктамасы боюнча

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \qquad (6)$$

предели жашап, анын мааниси чектүү J санына барабар болот. Ар бир эркин тандалган жетишерлик кичине ε оң санына ылайык табылган жетишерлик кичине δ оң саны, жалпы учурда ε дун тандалышынан көз каранды болот $\delta = \delta(\varepsilon)$.

12.2 Аныктама. *$[a, b]$ аралыгын $(a < b)$ кандай ыкма менен майда n бөлүктөргө бөлгөнүбүзгө жана ξ_k чекиттерин кантип тандаганыбызга карабастан, ар дайыма (6) пределдин мааниси бир гана чектүү J санына барабар болсо, анда J саны, $f(x)$ функциясынан $[a, b]$ аралыгы боюнча алынган Римандын маанисиндеги анык интеграл деп аталып,*

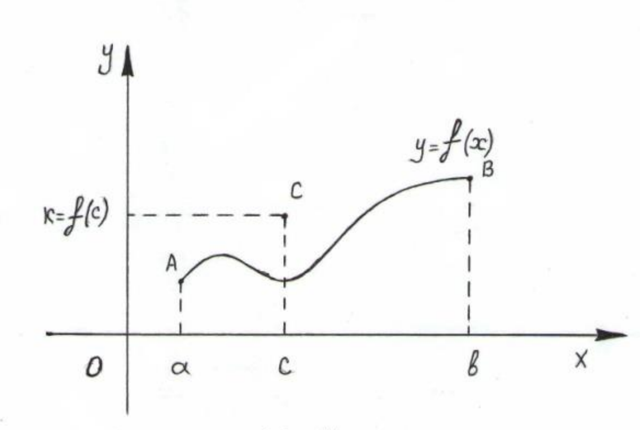
$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ символу менен белгиленет.}$$

$\int_a^b f(x)\,dx -$ символу $-$ "$f(x)$ функциясынан a дан b га чейинки алынган анык интеграл” – деп окулат. Ошентип, 12.2 аныктама боюнча

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (7)$$

теңдештиги аткарылат. Мында $f(x) -$ интеграл алдындагы функция, $f(x)\,dx -$ интеграл алдындагы туюнтма, $x -$ интегралдоо өзгөрүлмөсү, ал эми a, b сандары тиешелүү түрдө анык интегралдын төмөнкү жана жогорку пределдери деп аталышат. x өзгөрүлмөсү бир өлчөмдүү $0x$ огуна таандык $[a, b]$ кесиндисинде өзгөргөндүктөн, (7) ни сызыктуу интеграл деп да айтабыз.

Анык интеграл аппаратын түзүлүү табияты, майда бөлүкчөлөрдү суммалоо жана пределге өтүү амалдары менен түшүндүрүлгөндүктөн, $[a, b]$ аралыгындагы чектүү сандагы айрым бир чекиттерде $f(x)$ функциясы коңшу чекиттерден айырмаланып, чектүү секирик көрүнүштө өзгөрсө же болбосо I – роддогу үзүлүшкө ээ болсо деле, (7) пределин чектүү маанисин жашашына тоскоолдук кыла албайт. Чынында эле, $[a, b]$ аралыгынын кайсы бир с чекитинде $f(x)$ функциясы секирик жасап, кошуна чекиттерден кескин айырмаланган кандайдыр бир чектүү К маанисин кабыл алса $(К = f(с))$, анда $f(x)$ тин ордуна жардамчы (12.2 – чийме)



12.2-чийме

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ эгерде } x \in [a, b], \;\; x \neq с \text{ болсо,} \\ К \text{ эгерде } x = с \text{ болсо} \end{cases}$$ функциясын киргизсек,

$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ болорун көрөбүз. Анткени $g(x)$, $f(x)$ экөөсүнүн тең $[a, b]$ аралыгындагы интегралдык суммалары бирдей пределдик мааниге ээ болушат.

Ошондой эле, 12.2 аныктамасында $[a, b]$ аралыгы боюнча алынган анык интеграл $a < b$ болгон учур үчүн баяндалгандыктан:

1) $b = a$ болсо, анда $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

2) $b < a$ болсо, анда $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ болорун эскерте кетебиз.

12.2 аныктамага ылайык, 12.1 – чиймеде сүреттөлгөн ийри сызыктуу трапециянын аянты $S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx$, ал эми материалдык чекиттин басып өткөн жолу $S = \int_{t_0}^{T} f(\tau)\,d\tau$ формулалары менен эсептелишет.

8. мисалдар

12.2 аныктамасы колдонуп, $[-1,\ 4]$ аралыгы боюнча

1) $\int_{-1}^{4}(1+x)dx$ анык интегралын эсептеп көрөлү.

►Аралык эркин ыкмада майда бөлүктөргө бөлүнө бергендиктен, $[-1,\ 4]$ аралыгын барабар n бөлүктөргө бөлөлү: Анда ар бир бөлүкчөнүн узундугу турактуу

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{4-(-1)}{n} = \frac{5}{n} = \lambda$ санына барабар болуп $(k = 1, 2, \dots, n)$, берилген аралык

$[x_{k-1},\ x_k] = \left[-1 + \frac{5(k-1)}{n}, -1 + \frac{5\,k}{n}\right]$ бөлүкчөлөрүнө бөлүнөт. Ар бир бөлүкчөлөрдөн эркин алынган ξ_k чекити деп, бөлүкчөлөрдүн сол четиндеги $\xi_k = -1 + \frac{5(k-1)}{n}$ чекиттерин алалы. Анда $f(x) = 1 + x$ функциясын $[-1,\ 4]$ сегментиндеги интегралдык суммасы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[1 + \left(-1 + \frac{5(k-1)}{n}\right)\right]\frac{5}{n} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{25(k-1)}{n^2}\right] = \frac{25}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) =$$

$$= \frac{25}{n^2}\cdot\frac{0 + n - 1}{2}\cdot n = \frac{25(n-1)}{2n} = \frac{25}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

көрүнүштө түзүлөт. Сумманы эсептөөдө арифметикалык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүн суммасын $s_n = \frac{a_1 + a_2}{2}\cdot n$ формуласы пайдаланылды. Ал эми анык интеграл сумманын $\lambda \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$ умтулгандагы предели катарында

$\int_{-1}^{4}(1+x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{25}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2}$ көрүнүштө эсептелет.

ξ_k чекитин бөлүкчө аралыкчанын оң чети $\xi_k = -1 + \frac{5\,k}{n}$ деп алып, башка бир интегралдык сумма түзсөк, анын предели да $\frac{25}{2}$ санына барабар болорун текшерип көрүүгө болот.◄

2) Кайсы бир тело убакыттын ар бир t ирмеминде $v(t) = t^2$ м/сек өзгөрүлмө ылдамдыгы менен кыймылда болсо, анда телонун $t = 0$ убатысынан $t = b$ убактысына чейин басып өткөн жолун узундугун тапкыла.

► Убакыттын $[0,\ b]$ аралыгын барабар n майда бөлүктөргө бөлсөк, ар бир бөлүкчө $\Delta t = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n} = \lambda$ узундугуна ээ болуп, $k-$ бөлүкчө убакыттын $t_k = \frac{b\,k}{n}$ ирмеминен $t_{k+1} = \frac{b\,(k+1)}{n}$ ирмемине чейин уланат.

Оболу убакыттын $[t_k,\ t_{k+1}]$ бөлүкчөсүндө телонун ылдамдыгын, кайсы бир каталык менен t_k ирмеминдеги ылдамдыкка $v(t_k) = (t_k)^2$ барабар деп алсак, анда убакыттын бул бөлүкчө аралыгында басылган жол $s_k \approx v(t_k)\,\Delta t = (t_k)^2\,\Delta t$ көрүнүштө эсептелет. Бул учурда, b убактысына чейинки жалпы жолдун узундугу, жакындаштырылган

$$S(b) \approx s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1} = {t_0}^2\,\Delta t + {t_1}^2\,\Delta t + \cdots + {t_{n-1}}^2\,\Delta t = \sum (t_k)^2\,\Delta t =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b\,k}{n}\right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}$$

көрүнүштө табылат.

Бөлүүлөрдүн n санын чексиз көбөйтсөк, $n \to \infty \Leftrightarrow \lambda \to 0$ умтулуп, кетирилген каталык азайып, жолдун узундугун эсептөө тактыгы чоңоёт. Демек, эсептөөнү талап кылган жолдун катасыз, накта узундугу

$$S(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} = \frac{b^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n^2} = \frac{b^3}{3}$$

санына барабар болот.

$\int_0^b t^2\ d\,t$ анык интегралына интегралдык сумма $\sum_{k=0}^{n-1} (t_k)^2\,\Delta t$

көрүнүштө болгондуктан, убакыттын $[t_k,\ t_{k+1}]$ бөлүкчөсүндө телонун ылдамдыгы орточо t_{k+1} ирмеминдеги ылдамдыкка барабар деп, башка бир интегралдык сумма түзсөк деле

$$\sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1})^2\,\Delta t = \frac{b^3}{n^3}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6},$$

анын $n\to\infty$ умтулгандагы предели

$S(b)=\int_0^b\ t^2\ d\,t=\frac{b^3}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n^3}=\frac{b^3}{3}$ келип чыгып, b убактысында телонун басып өткөн жолу $S(b)=\int_0^b\ t^2\ d\,t=\frac{b^3}{3}$ анык интегралына барабар болорун көрөбүз. ◄

Убакыттын $[a,b]$ аралыгында телонун баскан жолу, b убактысы менен a убактысында баскан жолдордун $S(b)-S(a)=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$ айырмасы катарында,

$$\int_a^b t^2\ d\,t=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3} \qquad (8)$$

анык интегралын маанисине барабар болот.

3) $0\le x\le 1$ аралыгында $y=e^x$ функциясы менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянтын тапкыла.

► $[0,\ 1]$ аралыгын барабар n майда бөлүктөргө бөлөлү:

$$x_0=0<x_1=\frac{1}{n}<\cdots<x_k=\frac{k}{n}<\cdots<x_n=\frac{n}{n}=1.$$

Ар бир $[x_k,\ x_k]$ бөлүкчөсүн узундугу $\Delta x_k=\frac{1}{n}$ ге барабар, бөлүкчөлөрдүн башталыш чекиттерин $\xi_k=x_k=\frac{k}{n}$ деп тандап ($k=0,1,\dots,n-1$), $k-$ бөлүкчөдөгү ийри сызыктуу трапециянын бөлүгүнүн аянтын сезилгис каталык менен бийиктиги $f(\xi_k)=e^{\frac{k}{n}}$, негизи $\Delta x_k=\frac{1}{n}$ болгон тик бурчтуктун аянты менен алмаштырабыз. Анда ийри сызыктуу трапециянын жакындаштырылган аянты

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

суммасына барабар болот. Кашаанын ичиндеги сумманы $a_0 = 1,\ q = e^{\frac{1}{n}}$ болгон геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүн суммасын формуласы боюнча эсептеп, жакындаштырылган аянтты

$S_n = \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1} \cdot \frac{1}{n}$ көрүнүшкө келтиребиз. Мындан $n \to \infty$ умтулгандагы пределге өтүп, талап кылынган аянттын туура маанисин

$$S = \lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1} \cdot \frac{1}{n} = (e-1)\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} = \left| \begin{matrix} x \to 0 \Rightarrow e^x - 1 \sim x \\ \text{болгондуктан} \end{matrix} \right| = e - 1$$

табабыз, б.а. $S = \int_0^1 e^x dx = e - 1$. ◄

4) Анык интегралдын аныктамасына таянып, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx$ эсептегиле.

► $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ кесиндисин

$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2n},\ x_2 = \frac{2\pi}{2n},\ \ldots, x_k = \frac{k\pi}{2n}, \ldots,\ x_n = \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$ чекиттери аркылуу барабар n майда бөлүктөргө бөлсөк, ар бир бөлүкчө кесиндин узундугу $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}$ турактуу болот.

ξ_k чекити катарында, $k-$ бөлүкчөлөрдүн оң $\xi_k = \frac{(k+1)\pi}{2n}$ учтарын тандап, интегралдык сумманы

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \xi_k \cdot \frac{\pi}{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2n} \cdot \left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right]$$

түзөбүз. Кашаанын ичиндеги сумманы

$\mathrm{P}_n = \cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}$ деп белгилеп, анын эки жагына тең $2\sin\frac{\pi}{4n}$ көбөйтүп, оң жагындагы тригонометриялык

функциялардын көбөйтүндүлөрүнө суммага ажыратуу формуласын колдонсок:

$$2\sin\frac{\pi}{4n}\mathrm{P}_n = 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{\pi}{2n} + 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{2\pi}{2n} + \ \dots + 2\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{\pi}{2n}\right) + sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{\pi}{2n}\right) + sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{2\pi}{2n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{2\pi}{2n}\right) +$$

$$+sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{3\pi}{2n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{3\pi}{2n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{4n} + \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) +$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{4n} - \frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = \sin\frac{3\pi}{4n} - \sin\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{5\pi}{4n} - \sin\frac{3\pi}{4n} + \sin\frac{7\pi}{4n} - \sin\frac{5\pi}{4n} +$$

$$+ \ \dots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{4n} - \sin\frac{(2n-3)\pi}{4n} = -\sin\frac{\pi}{4n} + \sin\frac{(2n-1)\pi}{4n} = \left|\begin{matrix}\text{көбөйт.}\\ \text{өзгөртсөк}\end{matrix}\right| =$$

$$= 2\sin\frac{\frac{(2n-1)\pi}{4n} - \frac{\pi}{4n}}{2} \cdot \cos\frac{\frac{(2n-1)\pi}{4n} + \frac{\pi}{4n}}{2} = 2\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \text{ же}$$

$$2\sin\frac{\pi}{4n}\mathrm{P}_n = 2\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \text{ келип чыгат.}$$

Мындан $\mathrm{P}_n = \dfrac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$ таап, интегралдык сумманы

$S_n = \dfrac{\pi}{2n} \cdot \mathrm{P}_n = \dfrac{\pi}{2n} \cdot \dfrac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4n}}$ көрүнүшкө келтирип, $n \to \infty$ умтулганда $\sin\frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi}{4n}$ экендигин эске алып пределге өтсөк,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4n}} = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} =$$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ жообуна ээ болобуз. ◄

5) Анык интегралдын аныктамасына таянып, $\int_a^b x^m \, dx$ интегралын $0 < a < b,\ m \neq -1$ шарттарында эсептегиле .

► $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ белгилөөсүн киргизип, $[a, b]$ кесиндисин $x_0 = a, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n = b$ чекиттери менен барабар эмес n майда бөлүктөргө бөлөлү. Мында $x_k = aq^k$.

$[x_k,\ x_k]$ бөлүкчөсүн сол учун $\xi_k = x_k = aq^k$ деп тандасак, интегралдык сумма

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^m \,(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (aq^k)^m \,a\,(q^{k+1} - q^k) =$$

$$= a^{m+1}(q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^{k(m+1)}$$

көрүнүштө түзүлөт. Акыркы сумманы геометриялык прогрессиянын алгачкы n мүчөсүн суммасын $\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}}$ формуласы менен эсептеп, интегралдык сумманы

$$S_n = a^{m+1}(q-1)\cdot\frac{\left(q^{n(m+1)}-1\right)}{q^{m+1}-1} = \frac{a^{m+1}(q-1)\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1\right]}{q^{m+1}-1} =$$

$= \frac{(q-1)\left(b^{m+1}-a^{m+1}\right)}{(q-1)(1+q+\cdots+q^{m-1}+q^m)} = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{1+q+\cdots+q^{m-1}+q^m}$ көрүнүштө жазбыз. Мындан $n \to \infty$ умтулганда

$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \to 1$ жана $\underbrace{max}_{0\le k\le n-1}\ [q^{k+1} - q^k] = \lambda \to 0$ умтуларын эске алып,

$$\int_a^b x^m\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{q\to1}\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{1+q+\cdots+q^{m-1}+q^m} = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

$m \neq -1$ болгон бардык чыныгы сандар үчүн, эсептөөнү талап кылган интегралдын маанисин табабыз. ◄

12.1.3 Функциялардын интегралдануучулук шарттары

12.3 Аныктама. *Эгерде* $[a,b]$ *сегментинде* $\int_a^b f(x)\,dx$ *аньк интегралы жашаса, анда ушул аралыкта аныкталган* $f(x)$ *функциясы Римандын маанисинде интегралдануучу (же жөн эле интегралдануучу) деп аталат. Ал эми анык интегралы жашабаса, анда интегралданбоочу функция болот.*

Демек, $f(x)$ функциясын $[a,b]$ сегментинде интегралдануучу болушу үчүн, анын ушул аралыкта чектүү анык интегралын жашашы – башкы шарт болуп эсептелет.

Iзарыл шарт . *$f(x)$ функциясын $[a,b]$ сегментинде интегралдануучу болушу үчүн, анын ушул аралыкта чектелген болушу зарыл шарт болуп эсептелет.*

► Тескерисинче, $f(x)$ функциясын $[a,b]$ аралыгын кайсы бир чекитинде чектелбеген болсун деп ойлоп, $[a,b]$ аралыгын $[x_{k-1},\ x_k]$ сыяктуу n майда бөлүктөргө бөлөлү $(k=1,2,\dots,n)$. Бул бөлүкчөлөрдүн ар биринен эркин абалда алынган $\xi_k \in [x_{k-1},\ x_k]$ чекиттердин кайсы биринде $f(x)$ функциясы чектелбеген болушу мүмкүн дейли.

Айталы $[x_0,\ x_1]$ бөлүкчөсүн кайсы бир чекитинде, $f(x)$ функциясы чектелбесин дейли. Интегралдык сумманы чектелбеген жана чектелген бөлүктөргө карата эки көрүнүшкө

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

бөлүп жазалы. $\xi_2,\ \xi_3,\ \dots,\ \xi_n$ чекиттерин утурумдук кыймылсыз деп фиксирлеп, бир гана $[x_0,\ x_1]$ бөлүкчөсүнөн алынуучу ξ_1 чекитин өзгөрүп кыймылдай алат деп туралы. Бөлүкчө аралыкта ξ_1 чекитин кыймылдатып олтуруп, функция чектелбеген чекитти тапсак, анда $f(\xi_1)\Delta x_1$ – кошулуучусу чектелбейт же абсолюттук чоңдугу боюнча эң чоң болгон абалга жетет. Мындай абалда $|S_n|$ суммасын абсолюттук чоңдугу да жетишерлик чоңоюп, $\underbrace{\max}_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\} \to 0$ умтулганда чектүү пределге ээ болбойт же 12.2 аныктамасы аткарылбагандыктан, $[a,b]$ аралыгында $f(x)$ функциясын анык интегралы жашабайт, анда 12.3 аныктамасын негизинде интегралданбоочу функция болот. Демек, $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралыгында интегралдануучу болсо, анда бул аралыкта сөзсүз чектелген болот.◄

Бирок функциянын чектелген болушу интегралдануучулукка жетиштүү шарт боло албайт, б.а. бардык эле чектелген функциялар интегралдануучу боло беришпейт. Мисалы,

2) Дрихленин $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{эгерде } x \text{ рационалдык сан болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } x \text{ иррационалдык сан болсо} \end{cases}$ функциясы $\forall x \in [0,\ 1]$: $|D(x)| \leq 1$ чектелген функция болгонуна карабастан, $\int_0^1 D(x)dx$ анык интегралы жашабайт.

►Чынында эле, бул аралыктагы узундуктары $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} = \lambda$ болгон n майда бөлүкчөлөрдүн ар биринен рационалдык ξ_k сандарын тандасак ($k = 1, 2, \ldots, n$),

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{n \text{ жолу}} = n \cdot \lambda \to \infty \ \ (\lambda \to 0 \ \Leftrightarrow \ n \to \infty)$$

сумма чексиз чоңоёт. Ал эми иррационалдык ξ_k сандарын тандасак,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(0 + 0 + \cdots + 0)}_{n \text{ жолу}} = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

эки башка интегралдык суммалары түзүлүп, алардын $\lambda = \frac{1}{n} \to 0$ умтулгандагы пределдери ξ_k чекиттерин тандоодон көз каранды болуп, жалгыз гана J предели табылбайт (эки башка ∞ жана 0 пределдерине ээ болууда). Анда 12.2 аныктамасы боюнча $D(x)$ функциясынын $[0,\ 1]$ аралыгында анык интегралы жашабайт же интегралданбоочу болот.◄

$\mathbf{II}_{\text{жетишерлик шарт}}$. *$[a, b]$ аралыгында үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясы, ушул аралыкта интегралдануучу болот.*

►Чынында эле $[a, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция Кантордун теоремасы боюнча (2 – бөлүк, §8.3) бир калыпта үзгүлтүксүз болот, б.а. туюк аралыктын каалаган чекиттеринде аргументтердин бирдей δ жакындык жыштыгына же термелүү узундугуна, функциянын тиешелүү маанилерин бирдей ε жакындык жыштыгы же термелүү узундугу туура келет. Вейерштрасстын теоремалары (2 – бөлүк, §8.2) боюнча $[a, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция чектелген болуп, аралыктын ичинде өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине жетет.

Аталган теоремаларга таянып $[a, b]$ сегментин n майда бөлүктөргө бөлүп, ар бир $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчө сегменттерин ξ_k чекиттеринде $f(x)$

функциясы эң чоң M_k маанисине жана η_k чекиттеринде эң кичине m_k маанисине жетсин дейли. Андай болсо, эркин тандалган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына жараша аргументтердин

$$\lambda = \underbrace{\max}_{1\le k\le n} \{\Delta x_k\} = \underbrace{\max}_{1\le k\le n} \{|x_k - x_{k-1}|\} < \delta$$

термелүү жыштыгына, функциянын $|f(\xi_k) - f(\eta_k)| = |M_k - m_k| < \varepsilon$ термелүүсү жооп бере ала тургандай жетишерлик кичине $\delta > 0$ саны табылышы керек ($k = 1, 2, \dots, n$). Демек, $f(x)$ функциясын $[a, b]$ сегментиндеги интегралдык суммаларын эң чоңу жана эң кичинеси жалпы бир

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad (9)$$

чектүү пределге ээ болуп, (7) теңдештиги аткарылат же $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында интегралдануучу болот. ◄

III$_{\text{жетишерлик шарт}}$. $[a, b]$ *сегментинде монотондуу жана чектелген* $f(x)$ *функциясы интегралдануучу болот.*

► Айталы, $f(x)$функциясы берилген аралыкта монотондуу өсүүчү болсун, ал эми $f(x)$ тин бөлүкчө $[x_{k-1},\ x_k]$ аралыктарындагы термелүү узундуктарын $\omega_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = M_k - m_k$ дейли. Мында функция өскөндүктөн $f(x_k) > f(x_{k-1})$ жана

$$f(x_k) = \underbrace{max}_{x_{k-1} \le x \le x_k} \{f(x)\} = M_k \ ; \quad f(x_{k-1}) = \underbrace{min}_{x_{k-1} \le x \le x_k} \{f(x)\} = m_k \ .$$

Анда эркин тандалган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына жараша табылуучу $\delta > 0$ санын $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ деп алсак, анда

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} < \delta \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [M_k - m_k]\, \Delta x_k < \delta \cdot [f(b) - f(a)] = \varepsilon$$

келип чыгып, (9) теңдештиги аткарыларына күбө болобуз. Мында $\sum M_k = f(b)$, $\sum m_k = f(a)$ эске алынды (($k = 1, 2, \dots, n$).◄

$\boldsymbol{IV}_{\text{жетишерлик шарт}}$. $f(x)$ *функциясы* $[a,b]$ *сегментинде чектелген болуп, чектүү сандагы чекиттерде I – түрдөгү үзүлүү чекиттерине ээ болсо деле, интегралдануучу болуп кала берет.*

Оболу бардык үзүлүү чекиттерин тактап, алардын ар бирин жетишерлик кичине аймакчалар менен курчап, $[a,b]$ аралыгын n бөлүкчөлөргө бөлүүдө: 1) *Үзүлүү чекиттерин толугу менен камтыган аймакчалардын сыртында жайгашкан бөлүкчөлөргө*;

2) *Үзүлүү чекиттерин толугу менен кармаган аймакчалардын ичинде же анын кайсы бир бөлүгүндө кармалган бөлүкчөлөргө* ажыратып карайбыз. $f(x)$ тин чектелген экендигине таянып, эки учурдагы бөлүкчө аралыктардагы интегралдык суммаларды баалоо менен баяндалган шарттын туура экендигине ишенебиз.

12.1.4 Анык интегралдын касиеттери

$[a,b]$ туюк аралыгында (сегментинде) аныкталган жана үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясы жогорудагы шарттардын негизинде, ушул аралыкта интегралдануучу болгондуктан, $\mathrm{C}[a,b]$ мейкиндигине таандык функциялар үчүн анык интегралдын касиеттерин карайлы.

1^0. *Анык интегралдын мааниси болгон чыныгы сан, төмөнкү жана жогорку* a,b *пределдеринен гана көз каранды болуп, интегралдоонун өзгөрүлмөсү* x *тен көз каранды болбойт. Ошондуктан интегралдоонун өзгөрүлмөсүн ар кандай белгилей берүүдөн, анык интегралдын мааниси өзгөрбөйт:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

2^0. *Туруктууну анык интегралдын белгисинин сыртына чыгарууга болот*

$$\int_a^b \mathrm{A}\,f(x)\,dx = \mathrm{A}\int_a^b f(x)\,dx.$$

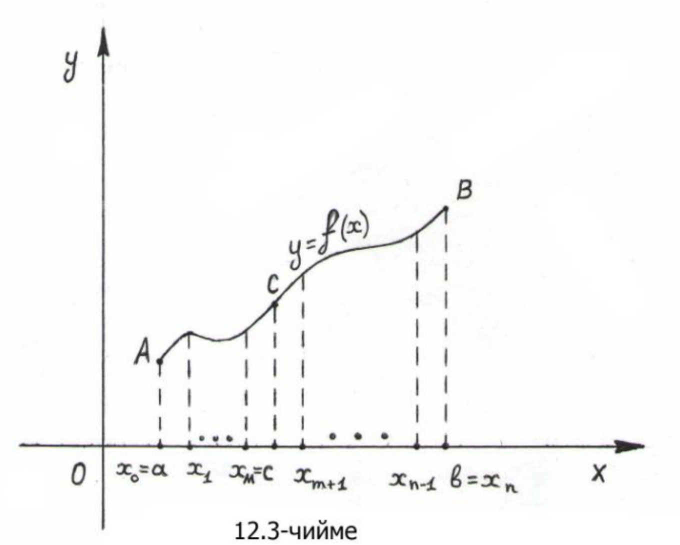
►Чынында эле, А – туруктуу сан (constanta) болсо

$$\int_a^b \mathrm{A}f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}\, f(\xi_k)\,\Delta x_k = \lim_{\lambda\to 0} \mathrm{A}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

$$= \mathrm{A}\int_a^b f(x)\,dx\ .◄$$

3^0. *Чектүү сандагы функциялардын алгебралык суммасынын анык интегралы, кошулуучулардын анык интегралдарын алгебралык суммасына барабар* : Эки кошулуучу функциялар үчүн, бул касиет

$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\ dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx$



12.3-чийме

көрүнүштө жазылып, анын чындыгы анык интегралдын 12.2 аныктамасын негизинде функциянын пределин касиеттеринен келип чыгат. ►Чынында эле,

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} [f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)]\,\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_1\,(\xi_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\Delta x_k =$$

$= \int_a^b f_1(x)\ dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx\ (k = 1, 2, \dots, n)$. ◄

4^0. Каалагандай a, b с *сандары үчүн ,*

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

барабардыгы орун алат.

► Эки учурдун болушу мүмкүн.

1) $a < c < b$ болсун дейли, берилген сегментти

$[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ эки сегменттердин суммасы катарында карап, интегралдык сумма $[a, b]$ аралыгын n майда бөлүккө бөлүү ыкмасынан

көз каранды болбогондуктан, бөлүү чекиттеринин бири **с** чекити менен дал келгендей бөлүү жүргүзөлү. Айталы, **с** чекити $m-$ бөлүү менен дал келсин $x_m = \mathrm{c}$ (12.3– чийме), анда $f(x)$ тин $[a, b]$ аралыгындагы интегралдык суммасын

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

көрүнүштө ажыратып жазып, $\lambda = \underbrace{\max}_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\} \to 0$ умтулгандагы пределин тапсак 4^0 касиетин туура болорун көрөбүз.

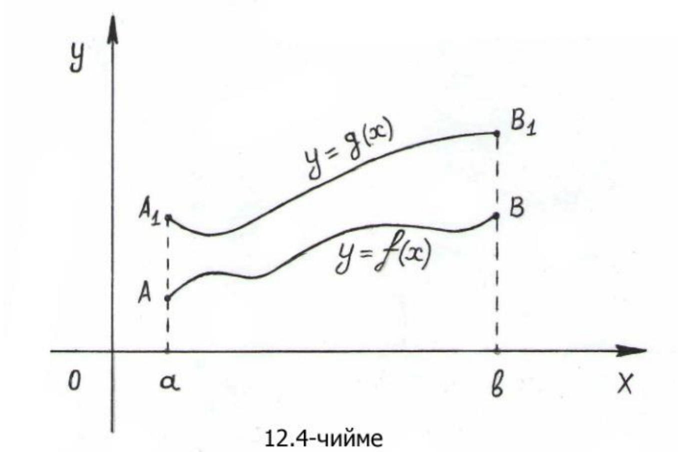
Геометриялык жактан $f(x) > 0$ болгондо, бул касиет $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын аянты $aACc$ менен $cCBb$ ийри сызыктуу трапециялардын аянттарынын суммасына барабар экендиги менен түшүндүрүлөт(12.3– чийме).

2) $a < b < \mathrm{c}$ болсун. Анда далилденген учурга таянып,

$\int_a^{\mathrm{c}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\mathrm{c}} f(x)\,dx$ теңдештигине ээ болобуз. Мындан $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)\,dx - \int_b^{\mathrm{c}} f(x)\,dx$ таап, экинчи интегралдын төмөнкү жана жогорку пределдерин алмаштырып жазсак, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{c}}^b f(x)\,dx$ каралган касиеттин аткарылганын көрөбүз. 4^0 касиет анык интегралдын аддитивдүүлүгүн көрсөтөт. ◄

5^0. *Эгерде* $\forall x \in [a, b]$*:* $f(x) \le \mathrm{g}(x)$ *болсо, анда*

$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx$ *барабарсыздыгы орун алат, б.а. интегралдын маанилери үчүн да барабарсыздыктар сакталат.*



12.4-чийме

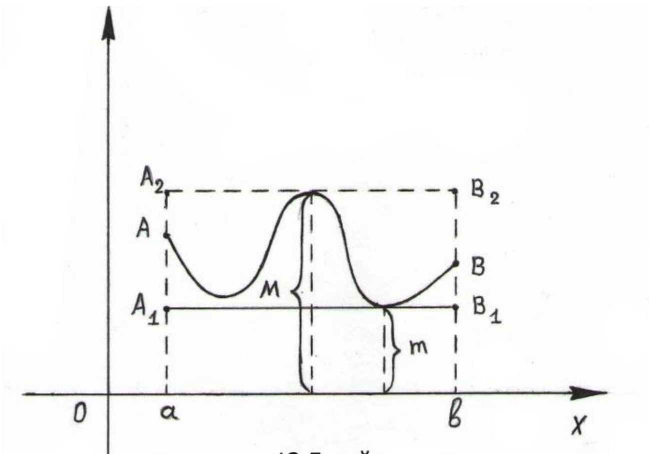
► $[a, b]$ сегментин ар кандай ыкма менен n бөлүккө бөлсөк да, анын ар бир x чекитинде $f(x) \le \mathrm{g}(x)$ болгондуктан, берилген

сегментти каалагандай $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүктөргө бөлгөнүбүзгө жана алардан ξ_k чекиттерин кандай тандаганыбызга карабастан,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k$$

барабарсыздыгы орун алат ($k = 1, 2, \dots, n$). Мындан

$\lambda = \underbrace{\max}_{1\le k\le n} \{\Delta x_k\} \to 0$ умтулгандагы пределге өтүү менен, $a \le b$ болгон учурда $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ болоруна күбө болобуз. Геометриялык жактан 5^0 касиетти $f(x) > 0,\ g(x) > 0$ болгон учурда $aABb -$ ийри сызыктуу трапециясын аянты, $aA_1B_1b -$ ийри сызыктуу трапециясын аянтынан кичине болору менен түшүндүрүүгө болот (12.4– чийме). ◄



12.5-чийме

6^0 . *Эгерде* $a < b$ *болсо, анда* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ *барабарсыздыгы аткарылат.*

►Абсолюттук чоңдуктун касиеттерине таянып жазылган

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ барабарсыздыктары, $[a, b]$ кесиндиси боюнча интегралдоо учурунда сакталып кала бергендиктен,

$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ же болбосо, $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ барабарсыздыгы туура болот. ◄

7^0. *Эгерде* m, M *сандары* $[a, b]$ *аралыгында тиешелүү түрдө* $f(x)$ *функциясын эң чоң жана эң кичине маанилери болушса, анда*

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a) \qquad (10)$$

барабарсыздыктары орун алат.

► $\forall x \in [a,b]$: $m \leq f(x) \leq M$ болгондуктан,

$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$,

$\int_a^b m\,dx = m\int_a^b dx = m(b-a)$, барабарсыздыктары орун алып,

$\int_a^b Mdx = \text{M}\int_a^b dx = \text{M}(b-a)$ маанилерин барабарсыздыкка койсок, (10) келип чыгат (12.5 - чийме). Геометриялык жактан (10) ду $a\text{AB}b$ ийри сызыктуу трапециянын аянты, бийиктиктери m, M сандары болгон $a\text{A}_1\text{B}_1b$ жана $a\text{A}_2\text{B}_2b$ тик бурчтуктарынын аянттарын

$$S_{a\text{A}_1\text{B}_1b} \leq S_{a\text{AB}b} \leq S_{a\text{A}_2\text{B}_2b}$$

арасында болот деп түшүнөбүз. ◄

§12.2 Анык интеграл жөнүндөгү негизги теоремалар

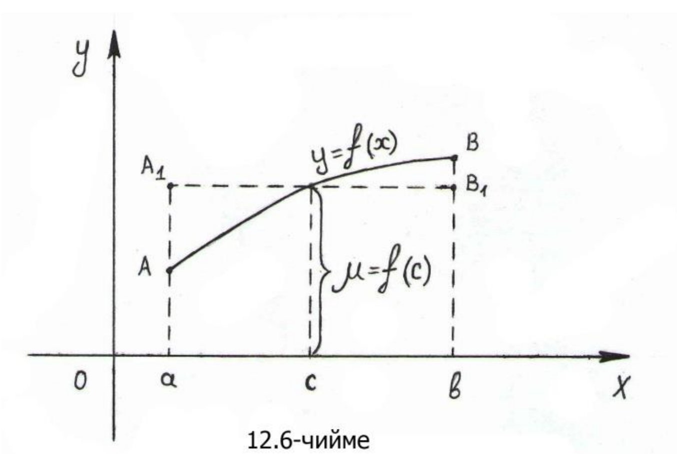
12.2.1 Орточо маани жөнүндөгү теорема

$\text{C}[a,b]$ мейкиндигине таандык болгон функциялардын анык интегралдары үчүн, орточо маани жөнүндөгү теорема орун алат.

12.1 Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда $[a,b]$ аралыгынан кандайдыр бир c чекити табылып,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\text{c})\cdot(b-a) \qquad (11)$$

барабардыгы аткарылат.



12.6-чийме

► Эгерде $a = b$ болсо (11) барабардык аткарылып, теорема далилденген болот. Ошондуктан $a < b$ болсун дейли, анда үзгүлтүксүз функция катары $f(x)$ бул аралыкта чектелген болот. $f(x)$ тин эң кичине маанисин m, ал эми эң чоң маанисин M

десек,

$m \leq f(x) \leq \ M$ барабардыгы орун алып, (10) барбарсыздыктары

$$m(\,b-a) \leq \int_a^b \, f(x)\,dx \leq \mathrm{M}(\,b-a)$$

аткарылат. Мындан ($b-a$) га мүчөлөп бөлүп жиберип,

$m \ \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \, f(x)\,dx \ \leq \ \mathrm{M}$ барабарсыздыктарына ээ болобуз. Үзгүлтүксүздүктүн шарты боюнча x аргументтери $[a, b]$ аралыгында өзгөргөн кезде, $f(x)$ функциясын ($f(x) \in \mathrm{C}\,[a, b]$) маанилери $[m\,,\ M\,]$ аралыгын жыш толтурат, анда ушул аралыкта жайгашкан сандардын бири катарында

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b \, f(x)\,dx$ саны да, $f(x)$ тин $[a, b]$ аралыгын кайсы бир с чекитиндеги $f(\mathrm{c})$ маанисине барабар болот

$\mu = f(\mathrm{c}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \, f(x)\,dx$, б.а. (11) аткарылат.

$a > b$ болгон учурда деле, $[b,\ a]$ сегментинен с чекити табылып,

$$\int_a^b \, f(x)\,dx = -\int_b^a \, f(x)\,dx = -f(\mathrm{c})\cdot(a-b) = f(\mathrm{c})\cdot(b-a)$$

(11) келип чыгат.

Орточо маани жөнүндөгү теореманы геометриялык жактан $a\mathrm{AB}b$ ийри сызыктуу трапециясын аянты: бийиктиги ортолотуп табылган $\mu = f(\mathrm{c})$, негизи $(b-a)$ болгон кандайдыр бир aA_1B_1b тик бурчтугун аянтына тең болот деген мааниде түшүнөбүз (12.6 – чийме). ◀

12.2 Теорема. Орточо маани жөнүндө жалпыланган теорема

Айталы 1) $f(x)$ *жана* $\mathrm{g}(x)$ *функциялары* $[a, b]$ *аралыгында интегралданууучу болушсун; 2)* $m \leq f(x) \leq \ M$ чектелсин;

3) $\forall x \in [a, b]$ *:* $\mathrm{g}(x)$ *функциясын белгиси алмашпастан турактуу сакталсын, б.а.* $\mathrm{g}(x) \geq 0$ *же* $\mathrm{g}(x) \leq 0$ *болсун. Анда кандайдыр бир* μ *саны табылып (*$m \leq \mu \leq \ M$*),*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx = \mu \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx \qquad (12)$$

теңдештиги орун алат.

► Айталы $\mathrm{g}(x) \geq 0$ жана $a < b$ болсун дейли, анда

интегралдоодо $m \cdot \mathrm{g}(x) \leq f(x) \cdot \mathrm{g}(x) \leq M \cdot \mathrm{g}(x)$ барабарсыздыктары сакталгандыктан,

$$m \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx \leq M \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx \qquad (13)$$

келип чыгат. Шарт боюнча $\mathrm{g}(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx \geq 0$ деп алынат. Эгерде $\mathrm{g}(x) = 0$ нөлгө барабар болсо, акыркы барабарсыздыктарда нөлдөрдүн арасында жайгашкан интеграл катары $\int_a^b f(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx = 0$ да нөлгө тең болуп, (12) нөлдөрдүн теңдештиги катары аткарылып, теорема далилденген болот.

Эгерде $\int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx > 0$ интегралы нөлдөн чоң болсо, анда (13) барабарсыздыктарды ага мүчөлөп бөлүп жиберип,

$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx}{\int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx} \leq M$ ээ болбуз. Мындан m, M сандарын арасында жайгашкан кандайдыр бир μ саны табылып,

$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx}{\int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx}$ теңдештиги аткарылып, (12) келип чыгат деген тыянакка келебиз.◄

Эгерде $f(x)$ каралган аралыкта үзгүлтүксүз болсо, анда (12) формуланы

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx = f(\mathrm{c}) \int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx \qquad (14)$$

көрүнүштө жазууга болот ($a > b$ учуру интегралдоо пределдерин, $\mathrm{g}(x)$ тин белгилерин алмаштыруу менен далилденет).

9. Мисалдар

1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+cos^2x}\ dx$ интегралын (9) формуланы пайдаланып, баалагыла.

► $\cos x$ функциясы $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ аралыгында монотондуу кемүүчү болуп, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ден баштап 0 гө чейинки кемип барган маанилерди кабыл алат. Ошондуктан, берилген аралыкта $f(x) = \sqrt{1+cos^2x}$ минималдык $m = f(0) = 1$, максималдык $M = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ маанилерине жетет. Ал эми $b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ болот. Демек, (10) формуласын

$$1 \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+cos^2x}\ dx \ \le \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \quad \text{же}$$

$$\frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+cos^2x}\ dx \ \le \frac{\pi\sqrt{6}}{8}$$

көрүнүштөрдө жазып, берилген интеграл $\frac{\pi}{4}$ менен $\frac{\pi\sqrt{6}}{8}$ сандарын арасындагы маанилерге ээ болушу мүмкүн деген тыянак чыгарабыз. ◄

2) $\int_{12}^{18} \frac{cos^2x}{1+x^8} dx$ интегралын баалагыла.

► $cos^2x \le 1$ болгондуктан $x \ge 10$ болгондо,

$\frac{cos^2x}{1+x^8} = \frac{cos^2x}{\left(1+\frac{1}{x^8}\right)} \cdot \frac{1}{x^8} < 1 \cdot \frac{1}{x^8} \le \frac{1}{10^8} = 10^{-8}$ барабарсыздыгы орун алат. Ошондуктан берилген интеграл

$$\left| \int_{12}^{18} \frac{cos^2x}{1+x^8} dx \right| < (18-12) \cdot 10^{-8} < 10^{-7}$$

"-10^{-7}" ден "$+10^{-7}$" сине чейинки аралыктагы сандык мааниге ээ болот.◄

3) $\frac{1}{10\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \le \frac{1}{10}$ экендигин далилдегиле.

► $g(x) = x^9$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ деп алып, жалпыланган орточо маани жөнүндөгү теореманы пайдаланалы. $0 \leq x \leq 1$ аралыгында

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1$ барабарсыздыктары аткарылгандыктан, (13) барабарсыздыктарын пайдаланып,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq 1\cdot\int_0^1 x^9\,dx \text{ ээ болобуз.}$$

Жогоруда каралган (8) эрежени колдонуп табылган

$\int_0^1 x^9\,dx = \frac{1}{10}$ маанисин эске алып, далилдөөнү талап кылган

баалоо $\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx \leq \frac{1}{10}$ барабарсыздыктарын туура экендигине күбө болобуз. ◄

4) $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin x}\,dx \leq \frac{2\pi^3}{3}$ экендигин далилдегиле.

► $[0,\ \pi]$ аралыгында $g(x) = x,$ $f(x) = \sqrt{\sin x}$ функциялары үзгүлтүксүз жана оң болушуп, $\sqrt{\sin x}$ функциясы максималдык М = 1, минималдык $m = 0$ маанилерине жетет. Анда (13) барабарсыздыктарды эске алып,

$0\cdot\int_0^{\pi} x\,dx \leq \int_0^{\pi} x\sqrt{\sin x}\,dx \leq 1\cdot\int_0^{\pi} x\,dx$ ээ болобуз. Мындан (8) эрежесин колдонуп,

$\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin x}\,dx \leq \int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}93 < \frac{2\pi^3}{3} \approx 20{,}64$, берилген барабарсыздыктын туура экендигине ишенебиз.◄

5) $[0,\ \pi]$ аралыгын 3 жана 6 барбар аралыктарга бөлүп, $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ анык интегралын эң чоң (жогорку) жана эң кичине (төмөнкү) интегралдык суммаларын түзүп, аларды салыштыргыла.

► Оболу $[0,\ \pi]$ аралыгын $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{3},\ x_2 = \frac{2\pi}{3},\ x_3 = \pi$ чекиттери менен барабар үч бөлүккө бөлөлү. Биринчи $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$ бөлүктө $\sin x$ монотондуу өсүп, аралыктын сол учунда минималдык $m_0 = 0$, оң

учунда максималдык $\mathrm{M}_0 = 1$ маанилерге жетет. Экинчи $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ бөлүктүн сол учунда минималдык $m_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, аралыктын ички $\frac{\pi}{2}$ чекитинде максималдык $\mathrm{M}_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ маанилерин кабыл алса, үчүнчү $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ аралыгында кемүүчү болуп, аралыктын сол учунда максималдык $\mathrm{M}_2 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, оң четинде минималдык $m_2 = \sin\pi = 0$ маанилерге ээ болот. Бардык бөлүкчөлөрдүн узундуктары $\Delta x_k = \frac{\pi}{3}$ турактуу санына барабар. Андай болсо, төмөнкү интегралдык сумма

$$s = \sum_{k=0}^{2} m_k \Delta x_k = \left[0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right] \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}907\,,$$

ал эми жогорку интегралдык сумма

$$S = \sum_{k=0}^{2} M_k \Delta x_k = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\pi(\sqrt{3}+1)}{3} \approx 2{,}86$$

сандык маанилерине ээ болот.

Эгерде $[0, \pi]$ аралыгын $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{6},\ x_2 = \frac{\pi}{3},\ x_3 = \frac{\pi}{2},\ x_4 = \frac{2\pi}{3}$, $x_5 = \frac{5\pi}{6},\ x_6 = \pi$ чекиттери менен 6 барабар бөлүктөргө бөлсөк, ар бир бөлүктүн узундугу $\Delta x_k = \frac{\pi}{6}$ турактуу санына барабар болот.

Биринчи $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ бөлүктө $m_0 = \sin 0 = 0,\ \mathrm{M}_0 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

Экинчи $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ бөлүктө $m_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \mathrm{M}_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Үчүнчү $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ бөлүктө $m_2 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \mathrm{M}_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

Төртүнчү $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ бөлүктө $m_3 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \mathrm{M}_3 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$;

Бешинчи $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$ бөлүктө $m_4 = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, \mathrm{M}_4 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Алтынчы $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ бөлүктө $m_5 = \sin\pi = 0\,, \mathrm{M}_5 = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

төмөнкү жана жогорку маанилерин алабыз. Демек төмөнкү сумма

$$s^* = \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0\right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}43\,,$$

жогорку сумма

$$S^* = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3}) \approx 2{,}48$$

көрүнүштөрдө табылып, бөлүүлөрдүн саны көбөйгөн сайын төмөнкү жана жогорку интегралдык суммалар бири – бирине жакындап, бөлүүлөр чексиз көбөйгөндө дал келишип, анык интегралдын сандык мааниси болуп калышат деген жыйынтыкка келебиз:

$s \le s^* \le \int_0^\pi \sin x\, dx \le S^* \le S.$ ◄

Эскертүү. *12.2 аныктамада $[a, b]$ аралыгын кандай ыкма менен n бөлүккө бөлгөнүбүзгө, ξ_k чекитин кандай тандаганыбызга карабастан бардык интегралдык суммалар бир $\int_a^b f(x)\, dx$ пределдик маанисине умтулат деп айтылган. Бардык интегралдык суммалар төмөнкү жана жогорку интегралдык суммалардын арасындагы маанилерге ээ болгондуктан, аныктаманын аткарылуусу үчүн,*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \quad \text{же}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = 0 \qquad (15)$$

теңдештиктерин аткарылышы зарыл жана жетиштүү шарт болуп эсептелет. Математикада төмөнкү жана жогорку интегралдык суммаларды сунуштаган математик Дарбунун урматына, аларды Дарбунун төмөнкү жана жогорку суммалары деп аташат.

6) Алдын ала берилген $\varepsilon = 0{,}001$ санына жараша жетишерлик кичине, кандай $\delta > 0$ саны табылып $\Delta x_k < \delta$ болсо эле,

$$\left|\int_0^3 \sin 50x\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} \sin 50\,\xi_k \Delta x_k\right| < 0{,}001 \qquad (*)$$

барбарсыздыгы аткарыларын көрсөткүлө. Мында

$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 3, \forall \xi_k \in [x_k,\ x_{k+1}]$.

► $[0,\ 3]$ кесиндисин көрсөтүлгөн чекиттер менен n майда бөлүктөргө бөлүп, Дарбунун төмөнкү жана жогорку интегралдык суммаларын түзсөк,

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le \int_0^3 \sin 50x\,dx \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

жана $$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \sin 50\xi_k\,\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \qquad (**)$$

барабарсыздыктарынын аткарылышы калетсиз. Мында m_k, M_k сандары $\sin 50x$ үзгүлтүксүз функциясын $[x_k,\ x_{k+1}]$ аралыгындагы эң кичине жана эң чоң маанилери. Ошентип $(*)$ барабарсыздыгын далилдөө үчүн,

$$\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k < 0{,}001 \text{ же} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k < 0{,}001 \qquad (16)$$

барбарсыздыктарын аткарылышын далилдөө жетиштүү болорун байкайбыз.

$f(x) = \sin 50x$ функциясы $[x_k,\ x_{k+1}]$ аралыгында Лагранждын теоремасын (2 – бөлүк, 9.6.2 ни кара) шарттарын канааттандырат. Айталы, $\sin 50x$ функциясы бул аралыктын ичиндеги кайсы бир a_k чекитинде эң кичине $m_k = \sin 50a_k$, экинчи бир b_k чекитинде эң чоң $M_k = \sin 50\,b_k$ маанилерине жетсин, анда Лагранждын формуласын негизинде, $[m_k,\ M_k]$ аралыгынан жок дегенде бир c_k чекити табылып,

$\forall x \in [m_k,\ M_k]$: $\sin 50\,b_k - \sin 50a_k = sin'(50c_k) \cdot (b_k - a_k)$ же

$M_k - m_k = 50\cos 50c_k \cdot (b_k - a_k)$ теңдештиктери аткарылат. Мындан

$\cos 50c_k \le 1$ жана $m_k \le M_k$ болгондуктан,

$0 \le M_k - m_k \le 50\ |b_k - a_k|$ барбарсыздыктарын алабыз.

Экинчи жактан, $[m_k,\ M_k] \subset [x_k,\ x_{k+1}] \Rightarrow \quad M_k - m_k \le x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ экендигин эске алып, акыркы барабарсыздыктарды

$$0 \le M_k - m_k \le 50\ \Delta x_k$$

көрүнүшүндө кайра жазып, колдонсок

$$0 \le \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k \le \sum_{k=0}^{n-1} 50\Delta x_k \cdot \Delta x_k = 50\sum_{k=0}^{n-1}\Delta {x_k}^2$$

келип чыгат. Бөлүкчө узундуктардын суммасы, кесиндинин узундугуна тең болгондуктан

$\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = 3$ болуп, $\Delta x_k < \delta$ болсо эле $50\sum_{k=0}^{n-1}\Delta {x_k}^2 < 50\delta \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = 150 \cdot \delta$

болору келип чыгат. Демек, $\Delta x_k < \delta$ болору менен

$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k < 150 \cdot \delta$ аткарылары келип чыгып,

$150\delta < \varepsilon = 0{,}001$ шартынан δ саны, $\delta = \frac{0{,}001}{150}$ көрүнүштө табылат, б.а (16) нын аткрылышын камсыз кыла тургандай δ табылат. ◄

Жалпылап айтканда, эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментин бардык чекиттеринде чектүү туундуларга ээ болсо, анда

$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгын аткарылышын

камсыз кыла тургандай δ саны, $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}\,(b-a)}$ көрүнүштө табылат. Айрым талкуулордун жардамы менен $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ деп алууга да болорун көрсөтүүгө болот.

Мисалы: 7) жетишерлик кичине $\delta > 0$ санын кандай маанисинде, $\Delta x_k < \delta$ болгондо

$$\left|\int_2^7 x^2dx - \sum_{k=0}^{n-1} {\xi_k}^2 \Delta x_k\right| < 0{,}001$$ барабарсыздыгын аткарыларын

көрсөткүлө.

► $y = x^2$ функциясы $[2,\ 7]$ кесиндисинде монотондуу өсүүчү болуп, кесиндинин сол четинде минималдык $f(2) = 2^2 = 4$, оң четинде максималдык $f(7) = 7^2 = 49$ маанилерине жетет. Анда δ саны

$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \frac{0{,}001}{49-4} = \frac{0{,}001}{45}$ көрүнүштө табылып, $\Delta x_k < \delta = \frac{0{,}001}{45}$ болгондо жогорудагы барабарсыздык аткарылат. ◄

12.2.2 Жогорку предели өзгөрүлмө болгон анык интеграл

Айталы, $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде аныкталган жана үзгүлтүксүз болсун. Анда интегралдануучулуктун II – шарты боюнча $f(x)$ функциясы, каралган аралыктын ар бир x чекитине карата түзүлгөн $[a,\ x]$ кесиндисинде $(a \le x \le b)$ интегралдануучу болот, анткени $f(x)$ функциясы $[a,\ x]$ те да үзгүлтүксүз. $\int_a^x f(x)dx$ анык интегралы өзүнүн жогорку $x -$ өзгөрүлмө жана төмөнкү $a -$ туруктуу пределдеринен көз каранды болгондуктан, аны x ке карата өзгөрүлмө функция деп, $F(x,a) \equiv F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ көрүнүштө белгилейбиз.

12.3 Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болсо, анда $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ функциясы, бул аралыктын ар бир x чекитинде* $(\forall x \in [a,\ b])$ *туундуга ээ болуп,*

$$F'(x) = \left[\int_a^x f(t)\, dt\right]' = f(x) \qquad (17)$$

теңдештиги орун алат.

► Берилген $[a,\ b]$ аралыгынан каалагандай x_0 , x чекиттерин алып

$(x_0 < x,\ x \neq x_0\ )$, интегралдын 4^0 аддитивдүүлүк касиетине таянып $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ менен $F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$ интегралдарын айырмасын,

$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$

көрүнүшкө келтиребиз. $[x_0\,,\ x]$ аралыгында $f(x)$ функциясы орточо маани жөнүндөгү теореманын шарттарына баш ийгендиктен, ушул аралыктан кандайдыр бир с чекити табылып ($x_0 \leq \text{c} \leq x$),

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(\text{c}) \cdot (x - x_0) \quad \text{же}$$

$$F(x) - F(x_0) = f(\text{c}) \cdot (x - x_0) \ \text{ же } \ f(\text{c}) = \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)}$$

теңдештиктери орун алат. Мындан $[a,\ b]$ кесиндисинде $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, аралыктын ичиндеги каалагандай x_0 чекитинде да үзгүлтүксүз болуп,

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} f(\text{c}) = f(x_0)$$

барабардыгы аткарылат, б. а. (17) нин туура экендиги далилденет.

x_0 чекити эркин тандалгандыктан, (17) ни ар бир $x \in [a,\ b]$ чекиттеринде аткарылат деп эсептейбиз. Ал эми кесиндинин $x_0 = a$ учунда $F(x)$ тин оң жактуу, $x_0 = b$ учунда сол жактуу туундуларын жашашы жөнүндө гана сөз кылынат. ◄

Эгерде анык интегралдын төмөнкү предели өзгөрүлмө чоңдук болсо, анда 12.3 теореманы $f(x) \in C[a,\ b]$ болгондо, $\forall x \in [a,\ b]$:

$\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' = \left(-\int_b^x f(t)\,dt\right)' = -\left(\int_b^x f(t)\,dt\right)' = -f(x)$ көрүнүштө жайылтууга болот.

12.2.3 Ньютон – Лейбництин формуласы

Жогоруда каалагандай үзгүлтүксүз функцияга далилденген теоремага таянып, кандайдыр бир жогорку предели өзгөрүлмө болгон анык интеграл алгачкы функция болот деген жыйынтык чыгарабыз, б. а.

$f(x) \in C[a,\ b]\ \Rightarrow\ \forall x \in [a,\ b]$: $F(x) -$ алгачкы функциясы жашап, аны

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ көрүнүштө жаза алабыз. Демек, $f(x)$ функциясынан алынуучу анык эмес интегралды

$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)\,dt + \mathrm{C}$ көрүнүштө жазууга болот.

12.4 Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп, каралган кесиндинин ар бир чекитинде $F(x)$ алгачкы функциясына ээ болсо, анда $[a,\ b]$ аралыгы боюнча $f(x)$ тен алынган анык интеграл Ньютон – Лейбництин формуласы деп аталган*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (18)$$

эреже менен эсептелет.

► Айталы, экинчи бир $\Phi(x)$ функциясы да $f(x)$ ке, ушул эле аралыкта алгачкы функция болсун. Анда 12.3 – теоремасы боюнча $\Phi(x)$ ти $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ көрүнүштө жазууга болот. Теореманын шарты боюнча $F(x)$ функциясы да $[a,\ b]$ кесиндисинде алгачкы функция болгондуктан, каралган $\forall x \in [a,\ b]$ аралыгында $\Phi(x)$ менен $F(x)$ алгачкы функциялары бири – биринен турактуу С чоңдугуна гана айырмаланышат $\Phi(x) - F(x) = \mathrm{C}$.

Бул айырмачылыкты $x = a$ чекитинде

1) $\Phi(a) = F(a) + \mathrm{C}$,

2) $x = b$ чекитинде $\Phi(b) = F(b) + \mathrm{C}$ эки көрүнүштөрдө жазып, $\Phi(x)$ тин жазылуу эрежеси боюнча$\Phi(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0,$

$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ болорун эске алсак, 1) – учурдан $\mathrm{C} = -F(a)$ табылат. Табылган маанилерди 2) – койсок,

$\Phi(b) = F(b) - F(a)$ же $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

(18) келип чыгып, теорема далилденет. ◄

(18) формуладагы айырманы $F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b$ деп белгилеп, Ньютон – Лейбництин анык интегралды эсептөө эрежеси катарында

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (19)$$

көрүнүштө жазып колодонобуз.

Ошентип, көбүнчө анык интегралды 12.2 аныктамасына таянып эсептебестен, алгачкы функцияны табуу эрежесине (интегралдоо таблицасына) жана (19) эрежесине негизделген жаңы математикалык амал катарында кабыл алып, практикалык эсептөөлөрдө колдонобуз.

Мисалдар

8) $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{4} - \frac{0^3}{4} = \frac{1}{4}$.

9) $\int_{-1}^1 (x^2 + \sin x - 7x^{10})\,dx = \int_{-1}^1 x^2\,dx + \int_{-1}^1 \sin x\,dx - 7\int_{-1}^1 x^{10}\,dx =$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 - \cos x|_{-1}^1 - 7\cdot\frac{x^{11}}{11}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}(1+1) - [\cos 1 - \cos(-1)] -$$

$-\frac{7}{11}[1-(-1)] = \frac{2}{3} - \frac{14}{11} = -\frac{20}{33}$.

10) $\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$

§12.3 Анык интегралды эсептөө ыкмалары

12.3.1 Интегралдоо өзгөрүлмөлөрүн алмаштыруу усулу

Анык эмес интегралдарды эсептөө сыяктуу эле, анык интегралдарды эсептөөдө да өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу же ордуна коюу ыкмаларын кеңири колдонобуз.

12.5 Теорема. *Айталы, $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп, $\int_a^b f(x)\,dx$ анык интегралы жашасын жана төмөндөгүдөй шарттарды канааттандырган $\varphi(t)$ функциясын жардамы менен $x=\varphi(t)$ белгилөөсү киргизилсин $(\alpha \le t \le \beta)$ дейли. Айталы*

1) *$x=\varphi(t)$ функциясы $t \in [\alpha,\ \beta]$ аралыгында үзгүлтүксүз болуп, аралыктардын учтарында $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$ маанилерин кабыл алсын; Ал эми $\varphi(t)$ нын калган маанилери, $f(x)$ аныкталган жана үзгүлтүксүз болгон $[a,\ b]$ кесиндисинде кармалсын;*

2) *$t \in [\alpha,\ \beta]$ аралыгында $\varphi(t)$ функциясын $\varphi'(t)$ үзгүлтүксүз туундусу жашасын.*

Анда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \qquad (20)$$

формуласы орун алат.

(20) формуласы, анык интегралдагы интегралдоо өзгөрүлмөлөрүн алмаштыруу формуласы деп аталат.

► Теореманын шарты боюнча $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгондуктан, $\forall x \in [a,\ b]$ чекиттеринде анын алгачкы $F(x)$ функциясы табылып, $F'(x)=f(x)$ теңдештиги аткарылат.

$[\alpha,\ \beta]$ аралыгында аныкталган t га карата $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$ татаал функциясын алалы. Татаал функциядан туунду алуу эрежеси боюнча

$\Phi'(t)=F'(x)\cdot x'_t=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ ээ болуп, $t \in [\alpha,\ \beta]$ аралыгында $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$ татаал функциясы, $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ үзгүлтүксүз функциясына алгачкы функция болорун көрөбүз.

Экинчи жактан, $\int_a^b f(x)\,dx$ жашагандыктан Ньютон – Лейбництин

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ формуласы орун алат. Аны $t \in [\alpha,\ \beta]$ аралыгында $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ функциясына колдонуп, $\varphi(t)$ нын аралыктын учтарындагы маанилерин эске алуу менен

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \Phi(\beta)-\Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)] =$$

$= F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,$

(20) формуласын аткарыла турганын күбө болобуз. ◀

10. Мисалдар

1) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2\,dt$ функциясын туундусун тапкыла.

► $u = \sqrt{x}$ белгилөөсүн киргизип, берилген интегралды

$\Phi(u) = \int_0^u \cos t^2\,dt$ көрүнүштө жазсак, жогорку предели өзгөрүлмө анык интеграл катарында $\Phi'(u) = \cos u^2$ деп жазууга болот. Мындан

$F(x) = \Phi(\sqrt{x})$ болгондуктан, $F(x)$ функциясын туундусун

$F'(x) = \Phi'(u)\cdot u'_x = \cos u^2\cdot(\sqrt{x})' = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$ таба алабыз. ◀

2) $[0,\ \pi]$ кесиндисинде $f(x) = \sin x$ функциясын орточо маанисин тапкыла.

► Орточо маани жөнүндөгү теорема боюнча

$f(c) = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi-\cos 0) =$

$= -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$ табабыз.◀

3) $\int_1^2 x\cos x^2\,dx = \left|\begin{matrix} t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx, \\ x = 1 \Leftrightarrow t = 1, x = 2 \Leftrightarrow t = 4\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_1^4 \cos t\,dt =$

$= \frac{1}{2}\sin t\Big|_1^4 = \frac{\sin 4 - \sin 1}{2}.$

4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left|\begin{matrix} t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx, \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 1, x = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = 4\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_1^4 =$

$=(\sqrt{4}-\sqrt{1}) = 1.$

5) $\int_0^{\pi} e^{\cos x}\sin x\,dx = \left|\begin{matrix} t=\cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx, \\ x=0 \Rightarrow t=\cos 0 = 1, \\ x=\pi \Rightarrow t=\cos\pi = -1 \end{matrix}\right| = -\int_1^{-1} e^t\,dt =$

$= \int_{-1}^{1} e^t\,dt = e^t\Big|_{-1}^{1} = \mathrm{e} - e^{-1}.$

6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ интегралын эсептегиле.

► $t = tg\,\frac{x}{2}$ ордуна коюусун киргизсек, анда $x = 2arctg\,t,\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ болот. Тригонометриялык формулаларды пайдаланып

$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ туюнтабыз. Мындан интеграл алдындагы

функцияны $\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1+t^2-1+t^2} = \frac{1+t^2}{2}$

көрүнүшкө келтирип, $x = 0$ болгондо $t = tg\,\frac{0}{2} = 0;\ \ x = \frac{\pi}{2}$ болгондо

$t = tg\,\frac{\frac{\pi}{2}}{2} = tg\,\frac{\pi}{4} = 1$ пределдик маанилерин коюп, берилген интегралды

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^1 dt = t|_0^1 = 1$ көрүнүштө эсептөөгө болот.◄

7) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ \ (a>0)$ анык интегралын эсептегиле.

► $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\,dt \\ x=0 \Leftrightarrow t=0,\ x=a \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t \end{matrix}\right| =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\Big[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi -$

$-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\Big] = \frac{\pi a^2}{4}.$ ◄

8) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \begin{vmatrix} x = e^t, dx = e^t dt; \\ t = \ln x, x = 1 \Leftrightarrow t = 1, \\ x = e \Leftrightarrow t = 1 \end{vmatrix} = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$

12.6 Теорема. *Эгерде $f(x)$ функциясы О чекитине карата өз ара симметриялуу болгон $[-a,\ a], a > 0$ аралыгында интегралдануучу болсо, анда*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\, dx, \text{эгерде } f(x) - \text{ жуп функция болсо,} \\ 0, \quad \text{эгерде } f(x) - \text{так функция болсо.} \end{cases} \qquad (21)$$

эрежеси орун алат.

► Анык интегралды аралыктар боюнча эсептөө аддитивдүүлүк касиетине (4^0касиети) ээ болгондуктан, берилген анык интегралды $[-a,\ a] = [-a,\ 0] \cup [0,\ a]$ бирдей узундуктагы эки аралыктар боюнча

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

ажыратып жазабыз. Биринчи кошулуучу интегралды

$x = -t \Leftrightarrow t = -x \Rightarrow dx = -dt;\ x = -a \Leftrightarrow t = a,\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0$
ордуна коюуларын жүргүзүп,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_a^0 f(-t)\, dt = \int_0^a f(-t)\, dt = \begin{vmatrix} 1^0\text{касиет} \\ \text{боюнча} \end{vmatrix} = \int_0^a f(-x)\, dx$$

көрүнүшкө келтирели. Анда эки аралыктарга бөлүнгөн интегралды

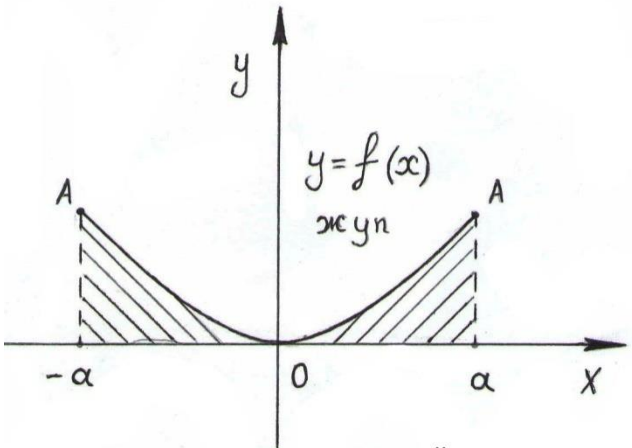
$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a f(-x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]\, dx$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]\, dx$$

көрүнүштө жаза алабыз. Мындан $f(x) -$ жуп функция болсо

$f(-x) + f(x) = f(x) + f(x) = 2f(x),$

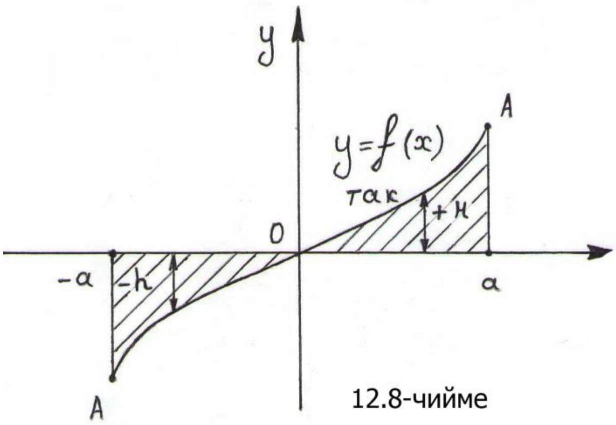
$f(x) -$ так функция болсо $f(-x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$



12.7-чийме

болгондуктан, (21) эреженин туура экендигине ишенебиз.◄

Геометриялык жактан жуп функциянын графиги Оу огуна карата симметриялуу болгондуктан, $-aAAa$ ийри сызыктуу трапециясын аянты Оу огу менен $(-aAO \cup OAa)$ тең экиге бөлүнөт. Ошондуктан, анын $[0,\ a]$ бөлүгүндөгү жарым аянты табылып, экиге көбөйтүлгөн деп түшүнөбүз (12.7 – чийме). Ал эми, так функциянын графиги О координаталар башталмасына карата симметриялуу жайгашып, ийри сызыктуу трапеция О чекити менен тең $(-aAO \cup OAa)$ экиге бөлүнөт. Бул бөлүктөрдүн бири $0x$ огунун терс багытын төмөн жагында, экинчиси $0x$ огунун оң багытын жогору жагында жайгашып, бөлүктөр чоңдугу боюнча бирдей, белгилери боюнча карама – каршы аянт бирдиктерине ээ болуп, алардын суммасы нөлгө тең болот (12.8 – чийме).



12.8-чийме

Мисалы: 9) $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$ интегралын эсептегиле.

► Берилген $[-2,\ 2]$ аралыгы координаталар башталмасы О чекитине карата симметриялуу жайгашкан. Бул аралыкта x^2 үзгүлтүксүз, жуп функция болгондуктан аньк интегралы жашап, (21) боюнча

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = 2\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = \frac{2}{3}$$ болот.◄

10) $\int_{-\pi}^{\pi} sin^3x\; e^{\cos x}dx$ интегралын эсептегиле.

► Интеграл алдындагы функция О чекитине карата симметриялуу жайгашкан $[-\pi,\ \pi]$ аралыгында үзгүлтүксүз жана

$f(-x) = sin^3(-x)e^{\cos(-x)} = -sin^3 x\, e^{\cos x} = -f(x)$ так функция болгондуктан, берилген анык интеграл (21) боюнча

$$\int_{-\pi}^{\pi} sin^3 x\, e^{\cos x} dx = 0$$

сандык маанисине ээ болот.◄

12.3.2 Бөлүктөп интегралдоо усулу

Анык эмес интегралдарды бөлүктөп интегралдоо усулу, көбөйтүүдөн туунду алуу

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$$

эрежесинен келип чыккан болчу. Ушундай эле ыкма менен анык интегралды бөлүктөп интегралдоо усулун келтирип чыгарууга болот.

12.6 Теорема. *Эгерде* $u(x)$ жана $v(x)$ *функцияларын* $[a,\ b]$ *кесиндисинде үзгүлтүксүз туундулары жашашса, анда*

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\, dx \quad (22)$$

анык инегралды эсептөө эрежеси орун алат.

► Көбөйтүндүдөн туунду алуу эрежесинен $u(x) \cdot v(x)$ функциясы, $[a,\ b]$ аралыгында $u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$ функциясына алгачкы функция болору келип чыгат. Анда Ньютон – Лейбництин формуласын колдонуп, берилген аралыкта

$$\int_a^b [u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)]\, dx = [u(x) \cdot v(x)]|_a^b \text{ же}$$

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx + \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b$$

теңдештигине ээ болобуз. Мындан

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\, dx$$

келип чыгып, теореманын далилдөөсүн аягына чыгарабыз. ◀

Практикалык эсептөөлөрдө $dv = v'(x)\,dx,\ du = u'(x)\,dx$ болорун эске алып, (22) формуласын

$$\int_a^b u \cdot dv = [u \cdot v]|_a^b - \int_a^b v \cdot du \qquad (23)$$

көрүнүштө колдонуу ыңгайлуу болот.

Мисалдар.

11) $\int_1^e \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx,\ \ v = x \end{array} \right| = [x \cdot \ln x]|_1^e -$

$$-\int_1^e x \cdot \frac{dx}{x} = [e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1] - \int_1^e dx = e \cdot 1 - 1 \cdot 0 - x|_1^e =$$

$= e - e + 1 = 1.$

12) $\int_0^\pi x^2 \cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx, \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \cdot \sin x|_0^\pi -$

$-\int_0^\pi \sin x \cdot 2x\,dx = \pi^2 \cdot \sin \pi - 0^2 \cdot \sin 0 - 2\int_0^\pi \sin x \cdot x\,dx =$

$= -2\int_0^\pi \sin x \cdot x\,dx$ ке ээ болобуз.

Акыркы интегралга (23) формуласын экинчи жолу колдонсок,

$$\int_0^\pi \sin x \cdot x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow\ du = dx \\ dv = \sin x\,dx \Rightarrow\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cdot \cos x|_0^\pi +$$

$$+\int_0^\pi \cos\ x \cdot dx = -\pi \cos \pi + 0 \cdot cos\ 0 - \sin x|_0^\pi = \pi - \sin \pi - \sin 0 = \pi$$

келип чыгып, берилген анык интеграл

$\int_0^\pi x^2 \cos x\,dx = -2\pi$ сандык маанисине ээ болот.

13) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\ dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{1}{x}\ln x\,\Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x} =$

$$= -\frac{1}{e}\ln e + -\frac{1}{1}\ln 1 + \int_1^e \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

12.3.3 Анык интегралды жакындаштырып эсептөө ыкмалары.

Айрым практикалык эсептөөлөрдө алгачкы функцияларын табуу мүмкүн болбогон функциялардын анык интегралын эсептөө зарылчылыктары туулат. Мындай учурларда, анык интегралды жакындаштырып интегралдоо схемалары аркылуу табылган сандык маанилери боюнча эсептөөгө туура келет. Ал эми кээде алгачкы функция белгилүү болгон учурда деле, анык интегралды ЭВМ дин жардамы менен жакындаштырып эсептөө ыңгайлуу болот. Ошондуктан анык интегралды жакындаштырып эсептөөдө кеңири колдонулган – тик бурчтуктар, трапециялар, Симпсондун параболалар жанаТейлордун формулаларына токтолуп өтөбүз.

1. Тик бурчтуктар формуласы. Айталы $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралын эсептөө талап кылынсын. Интеграл алынуучу $[a,\ b]$ кесиндисин

$x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k\ ,\quad k = 0, 1, \dots, n$ чекиттери аркылуу узундуктары

$\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ болгон, барабар n майда бөлүктөргө бөлөлү. Анда

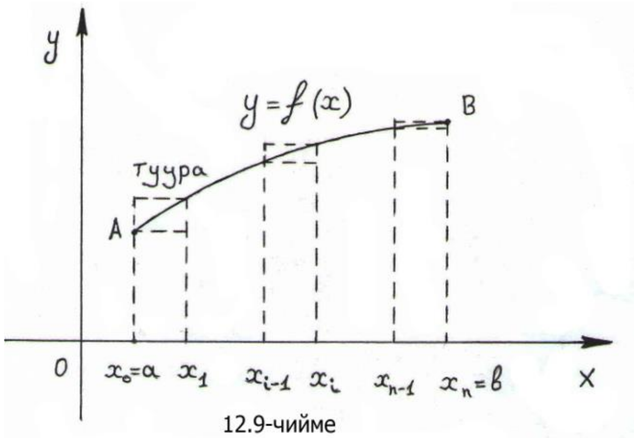
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\, x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)$$

теңдештиги келип чыгат. Мында $\xi_k \in [x_{k-1},\ x_k]$ аралыгынан эркин тандалган чекит ($k = 0, 1, \dots, n$). Жетишерлик чоң n сандары үчүн предел алдындагы туюнтма, пределдин маанисинен чексиз кичине чоңдукка гана айырмалангандыктан, акыркы теңдештиктен

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}), \qquad \text{же}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (24)$$

анык интегралды берилген аралыкта жакындаштырып эсептөө формулаларына ээ болобуз. (24) формулаларын биринчисинде ξ_k чекити катарында бөлүкчөлөрдүн $x_{k-1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (k-1)$ сол чети, экинчисинде $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$ оң чети алынып, алар тиешелүү түрдө тик бурчтуктардын сол жана оң формулалары деп аталышат. Геометриялык жактан (24) формулаларда ийри сызыктуу трапециянын аянты, жакындаштырылган түрдө негизи $\frac{b-a}{n}$, бийиктиги $f(x_{k-1})$ же $f(x_k)$ болгон болгон тик бурчтуктардын аянттарынын суммасы менен алмаштырылат деп түшүнөбүз (12.9 – чийме).



12.9-чийме

Эгерде ξ_k чекитин $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчөлөрүн дал ортосунан алсак, анда (24) формулада $\xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = a + \frac{b-a}{n} \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)$ болуп,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \qquad (25)$$

көрүнүшкө келет. (25) формуласы тик бурчтуктардын формуласы деп аталып, анык интегралды (24) формулаларына салыштырмалуу тагыраак эсептөөгө шарт түзөт.

2. Трапециялар формуласы. $[x_{k-1},\ x_k]$ кесиндисиндеги ийри сызыктуу трапециянын бир тилке бөлүкчөсүнүн аянтын,

бөлүкчө трапециянын $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$ аянты менен алмаштырсак, анда жалпы $[a,\ b]$ кесиндисиндеги ийри сызыктуу трапециянын аянтын, жакындаштырылган түрдө бөлүкчө трапециялардын аянттарын суммасына барабар деп алууга болот

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) + f(x_k)] =$$

$$= \begin{vmatrix} f(x_0) = f(a), \\ f(x_n) = f(b) \\ \text{эске алып} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{b-a}{2n}[f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + \ f(b)] =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right].$$ Мындан анык интегралды

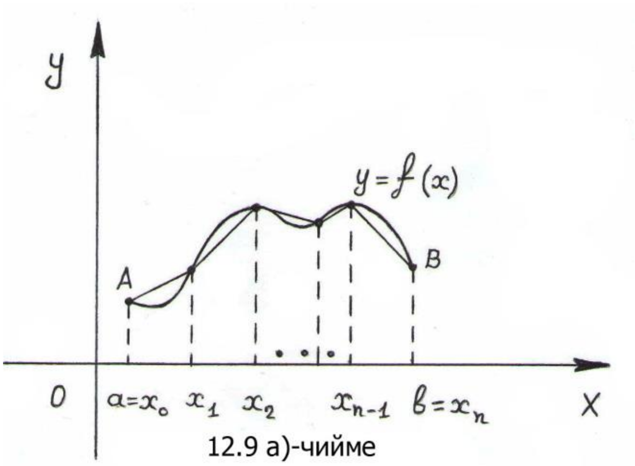
жакындаштырып эсептөөнүн эки түрдүү көрүнүштөгү *трапециялар формулаларын* келтирип чыгарабыз:

$$1) \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}\ ; \qquad (26)$$

$x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$ болгондуктан (26) ны эсептөөгө ыңгайлуу болгон

$$2) \int_a^b f(x)\,dx \approx\approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right] \qquad (27)$$

көрүнүштө жазабыз (12.9 а) – чийме). Бөлүүлөрдүн саны n көбөйгөн сайын (26), (27) формулалары менен эсептөө тактыктары жогорулайт.



12.9 а)-чийме

3. Парболалар же Симпсондун формуласы. Адегенде $P_0(0;\ y_0), P_1\left(\frac{h}{2};\ y_1\right)$, $P_2(h;\ y_2)$ чекиттери аркылуу өткөн $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ параболасын P_0P_2 жаасы менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын S аянтын эсептейли (12.10 – чийме)

$$S = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + c\ x\right)\Big|_0^h =$$

$$= \frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + c\,h = \frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c). \qquad (28)$$

Парабола берилген үч чекиттер аркылуу өткөндүктөн, анын теңдемелерин канааттандырат же алардын координаталарын параболанын теңдемесине койгондо:

$P_0(0;\ y_0)$ коюлганда

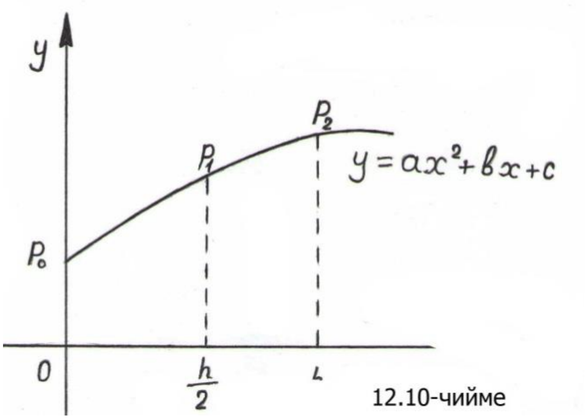
$$y_0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = с;$$

$P_1\left(\frac{h}{2};\ y_1\right)$ коюлганда

$$y_1 == \frac{ah^2}{4} + \frac{bh}{2} + c;$$

$P_2(h;\ y_2)$ коюлганда

$y_2 = ah^2 + bh + c$ теңдештиктери орун алат. Бул теңдештиктердин экинчисин 4 кө көбөйтүп, үчөөсүн тең мүчөлөп кошуп



12.10-чийме

$$2ah^2 + 3bh + 6c = y_0 + 4y_1 + y_2$$

барабардыгын алабыз. Алынган барбардыкты пайдаланып, ийри сызыктуу трапециянын (28) аянтын, берилген $P_0,\ P_1,\ P_2$ чекиттерин ординаталары менен

$S = \frac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ көрүнүштө туюнтууга болот.

Эми $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралын жакындаштырып эсептөөгө өтөлү.

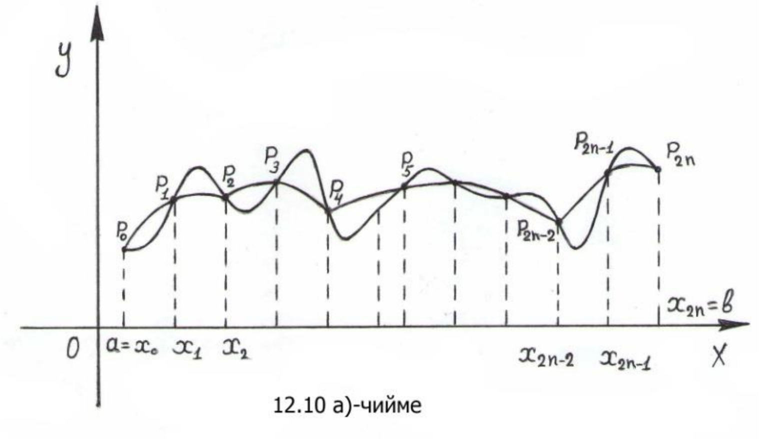
Айталы, $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана оң болгон кандайдыр бир $y = f(x)$ функциясы берилсин. $[a,\ b]$ кесиндисин жуп $2n$ сандагы

$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ \dots\ < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$ чекиттери менен барабар узундуктагы майда бөлүктөргө бөлүп, берилген интегралды

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx +\ \dots\ + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx \quad (29)$$

интегралдарын суммасы катарында жазалы (12.10 а) - чийме). Ар бир x_k чекиттеринен Oy огуна параллель түздөрдү жүргүзүп, түздөр менен $y = f(x)$ функциясын графиги болгон АВ ийрисин кесилишүү чекиттерин

$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2, \dots,\ \mathrm{P}_{2n-2},\ \mathrm{P}_{2n-1},\ \mathrm{B} = \mathrm{P}_{2n}$ деп, алардын тиешелүү ординаталарын $y_0,\ y_1,\ y_2, \dots, y_{2n-2},\ y_{2n-1},\ y_{2n}$ көрүнүштөдө белгилеп, ар бир үч $\mathrm{P}_{2k-2},\ \mathrm{P}_{2k-1},\ \mathrm{P}_{2k}$ чекиттер аркылуу вертикалдык симметрия огуна ээ параболаларды жүргүзөлү ($k = 0, 1, \dots, n$). Натыйжада n сандагы жогору жагынан параболалар менен чектелген ийри сызыктуу трапеция (параболалык трапециялардын биригүүсү) келип чыгат (12.10 а) – чийме).



12.10 а)-чийме

Берилген $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын $[x_{2k-2},\ x_{2k}]$ тилкесине туура келген бөлүгүн аянтын жакындаштырылган түрдө, жогорудагы үч чекиттер аркылуу өткөн параболалык трапециянын аянтына барабар деп эсептеп, $[x_{2k-2},\ x_{2k}]$ кесиндисин узундугу $h = x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n}$ болгондуктан, (28) формуладан

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

келип чыгат. Мында $y_k = f(x_k),\ \ k = 1, 2, \dots, n$. Анык интегралдардын бул маанилерин (29) га коюп,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n} \cdot [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ \dots + y_{2n-2}) +$$

$$+4(y_1 + y_3 + \ \dots + y_{2n-1})] \quad \text{же} \qquad (30)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=1}^{n} \left\{ f(x_{k-1}) \ + \ 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) \ + \ f(x_k) \right\}$$

көрүнүштөрдөгү анык интегралды жакындаштырып эсептөөчү *Симпсондун формулаларына* ээ болобуз. Бөлүүлөрдүн саны n өскөн сайын , Симпсондун формуласы менен анык интегралды эсептөө тактыгы жогорулап олтурат.

4. Анык интегралды жакындаштырып эсептөөдө кетирилген каталыктар. Жогоруда сөз кылынган анык интегралдарды жакындаштырып эсептөөнүн үч формулаларында кетирилген каталыктардын чоңдугу кандай болот деген суроо туулат. Анткени чоң каталык кетирүү менен анык интегралды эсептөө практикалык муктаждыкка жооп бере албай калышы мүмкүн.

Төмөндөгү теореманы далилдөөсүз кабыл алабыз:

12.7 Теорема. *Айталы* $f(x)$ *функциясы* $[a,\ b]$ *кесиндисинде төртүнчү тартиптеги үзгүлтүксүз туундуларга ээ болсун, анда*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\ \right| \le \frac{\mathrm{M}_2(b-a)^3}{24n^2},$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right| \le \frac{\mathrm{M}_2(b-a)^3}{12n^2},$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) + f(x_k)\right\}\right| \le \frac{\mathrm{M}_4(b-a)^5}{2880n^4}$$

барабарсыздыктары аткарылат, б.а. жогорудагы үч жакындаштырып эсептөөлөрдө кетирилген каталыктар көрсөтүлгөн сандардан ашып кете алышпайт..

Мында $\mathrm{M}_2,\ \mathrm{M}_4$ сандары $f(x)$ функциясын $f''(x)$ – экинчи жана $f^{(4)}(x)$ – төртүнчү тартиптеги туундуларын $[a,\ b]$ кесиндисиндеги эң чоң маанилери.

Ийри сызыктуу трапециядагы майда бөлүкчөлөр, түзүлүү табияты боюнча тик бурчтукка же трапецияга караганда параболанын жаасы менен чектелген бөлүкчөлөргө окшошураак болгондуктан, анык интегралды Симпсондун ыкмасы менен жакындаштырып эсептөөдө каталык n^{-4} кө пропорционалдуу болуп, салыштырмалуу аз болорун

баамдайбыз. Бирок Симпсондун ыкмасын колдонуу үчүн, интеграл алдындагы $f(x)$ функциясын төртүнчү тартиптеги үзгүлтүксүз туундуга ээ болушу керек экендигин эскертип өтөбүз.

5. Тейлордун көп мүчөсүн колдонуп жакындаштырып эсептөө. Айталы, интеграл алдындагы $f(x)$ функциясы интеграл алынуучу кесиндиде Тейлордун көп мүчөсүнө ажыралуу шарттарын канааттандырсын (2 – бөлүк, 9.7.2 ни кара), анда аны $x_0 \in [a,\ b]$ чекитинде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^n + \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{калдык}},\ 0 < \theta < 1$$ көп мүчө

көрүнүштө (калдык мүчөсү менен) жазууга болот. Анда берилген интегралды

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^n\}dx \qquad (\text{T})$$

формуласы менен жакындаштырып эсептөөгө болот. Тейлордун ажыралышында кетирилген каталыктар, тандалган n санына карата $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}(x - x_0)^n$ калдык мүчөсүн (мындан башка Коши жана Пеано тибиндеги калдык мүчөлөр бар) баалоо менен такталат.

Анык интегралды жакындаштырып эсептөөгө мисал катары, таблицалык интегралга келтирүүгө мүмкүн болбогон $\int_0^1 \sin x^2 dx$ интегралын, ар түрдүү ыкмалар менен эсептеп көрөлү.

►1) $[0,\ 1]$ кесиндисин $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i = \frac{1}{n} \cdot i$ чекиттери менен n бөлүктөргө бөлүп, (25) тик бурчтуктар формуласын негизинде

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} sin\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i-\frac{1}{2}}{n}\right)^2 =$$

$= \frac{1}{n} \cdot \left[\sin\left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \sin\left(\frac{3}{2n}\right)^2 + \dots + \sin\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n}\right)^2\right]$ ажыралышка ээ болуп, n ге маани берүү менен керектүү тактыкка чейинки анык интегралдын жакындаштырылган сандык маанисин таба алабыз. Жетишерлик чоң n $(n = 100, 1000, \dots)$ сандары үчүн, акыркы сумманы эсептөө көп убарагерчиликтерди талап кылгандыктан ЭВМ ди пайдаланыбыз.

2) (27) трапециялар формуласы боюнча

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{sin(x_{i-1}) + sin(x_i)}{2} =$$

$= \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\sin 0^2 + \sin 1^2}{2} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$, берилген интегралды жакындаштырып эсептөөгө ылайыкташкан сумманы алабыз.

3) Интеграл алдындагы $\sin x^2$ функциясын $R =]-\infty, +\infty[$ аралыгында Тейлордун көп мүчөсүнө ажыратуу мүмкүн болгондуктан, $x_0 = 0$ чекитинде (Т) формуласы боюнча

$$\int_0^1 \sin x^2 dx \approx \int_0^1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} - \cdots +$$

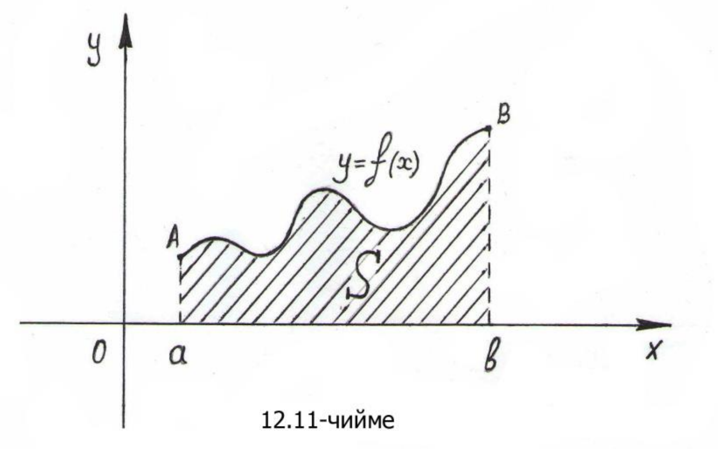
$$+(-1)^{n-1} \frac{1}{(2n+1)!}$$

көрүнүштө эсептеп, керектүү тактыкка чейинки n кошулуучулардын суммасын алабыз. ◄

§ 12.4 Анык интегралдын геометриялык колдонулуштары

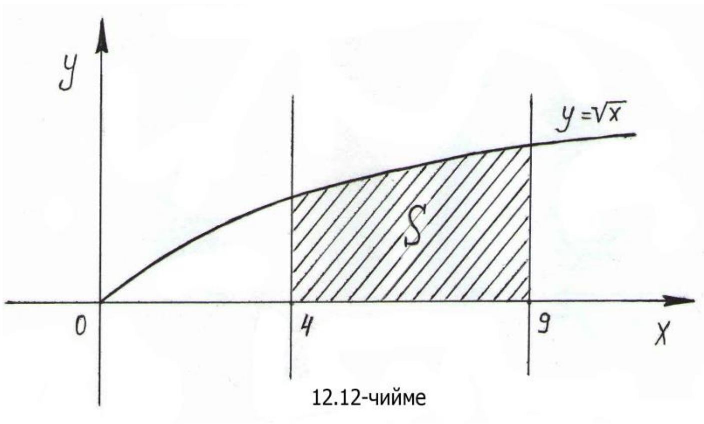
12.4.1 Тик бурчтуу координаталар системасында жалпак фигуралардын аянтын эсептөө эрежелери

1. Айталы, $y = f(x)$ функциясы $[a,\ b], (a < b)$ кесиндисинде $f(x) > 0 -$ оң жана үзгүлтүксүз функция болсун, анда тик бурчтуу Oxy координаталар системасында Ox огу, $x = a,\ x = b$ түздөрү жана $y = f(x)$ функциясын графиги менен чектелген $aABb$ ийри сызыктуу трапециянын аянты



12.11-чийме

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (31)$$



12.12-чийме

формуласы менен эсептелерин, анык интеграл түшүнүгүнө алып келүүчү мисалдан билебиз (12.11 – чийме).

Мисалы

1) $x = 4,\ x = 9$ түздөрү, Ox огу жана $y = \sqrt{x}$ функциясын графиги менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

►(31) формуланы колдонуп, изделген аянтты

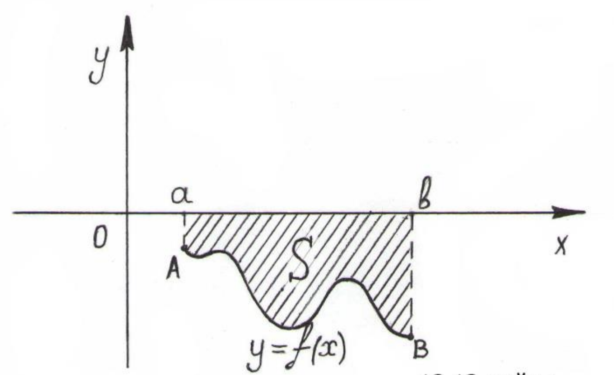
$S = \int_4^9 \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\Big|_4^9 = \frac{2}{3}\left(9^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}\ (27 - 8) = \frac{38}{3}$, аянт бирдигине барабар дейбиз (12.12 – чийме).◄

2. Айталы $[a,\ b],\ a < b$ кесиндисинде $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болуп, $f(x) < 0 -$ терс маанилерди кабыл алсын, анда $x = a,\ x = b$

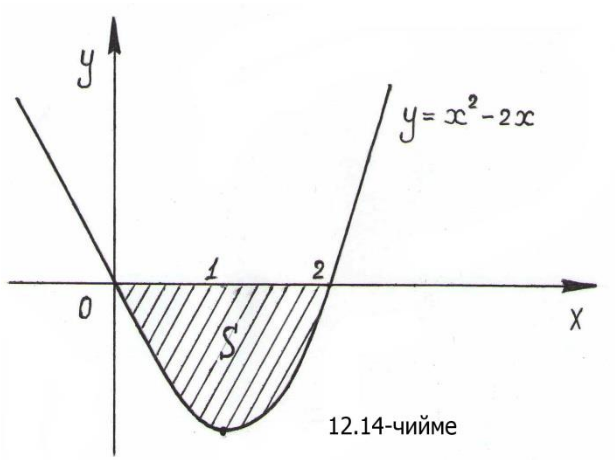
түздөрү, Ox огу жана $y = f(x)$ функциясын графиги менен чектелген фигуранын аянты (12.13 – чийме),

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{же} \quad S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad (32)$$

формуласы менен эсептелет. Бул учурда жалпак фигура Ox огунун төмөн жагында жайгашып, $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын бийиктиги $h = -f(x)$ катарында терс сан алынып, анык интегралдын сандык мааниси терс болот. Бирок бийиктик оң бирдик менен гана эсептелгендиктен, интегралды " $-$ " ка көбөйтүп оң белгиге айлантабыз, же аянт ар дайыма оң белгиде эсептелет деген маанини абсалюттук чоңдуктун алдына жазып (32) көрүнүштө билдиребиз.



12.13-чийме



12.14-чийме

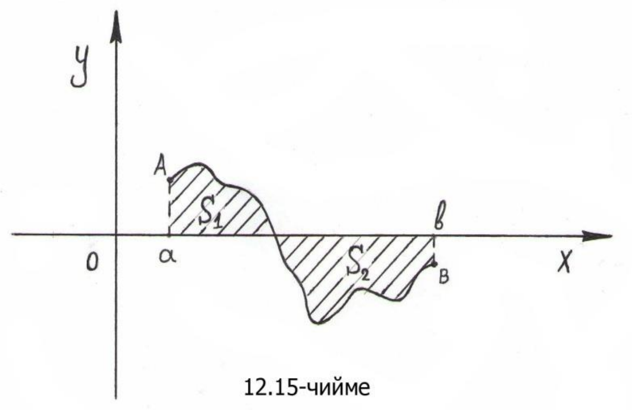
Мисалы, 2) $y = x^2 - 2x$ функциясы жана Ox огу менен чектелген фигуранын аянтын табалы (12.14 – чийме). ► Ox огу ($y = 0$) менен функциянын графигинин кесилишүү чекиттерин табуу үчүн, экөөсүнүн теңдемелерин теңдештирип, $x^2 - 2x = 0$ теңдемесинен $x = 0,\ x = 2$ чечимдерин табабыз. Демек, аянтын табуу талап кылынган фигура $[0,\ 2]$ кесиндисинде $y = x^2 - 2x \leq 0$ функциясы терс маанилерди алып, графиги жана Ox огу менен чектелип, Ox огун төмөн жагында жайгашкан. Анда (32) формула боюнча,

$S = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{2x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ аянт бирд. жообун алабыз.◄

3. Айталы $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болуп, анын ички бир **с** чекитинде (с $\in\ ]a,\ b[$) белгисин өзгөртсүн, б.а. $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын бир бөлүгү Ox огунун жогору жагында, экинчи бир бөлүгү төмөн жагында жайгашсын (12.15 – чийме). Анда $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын аянты, бул эки бөлүктөрдүн аянттарын суммасы катарында эсептелет.

$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$ же

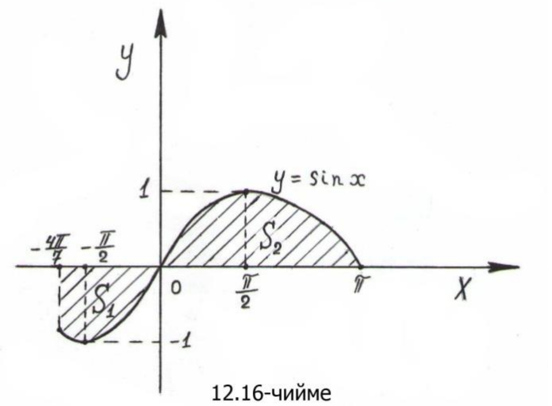
$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx\ . \qquad (33)$$



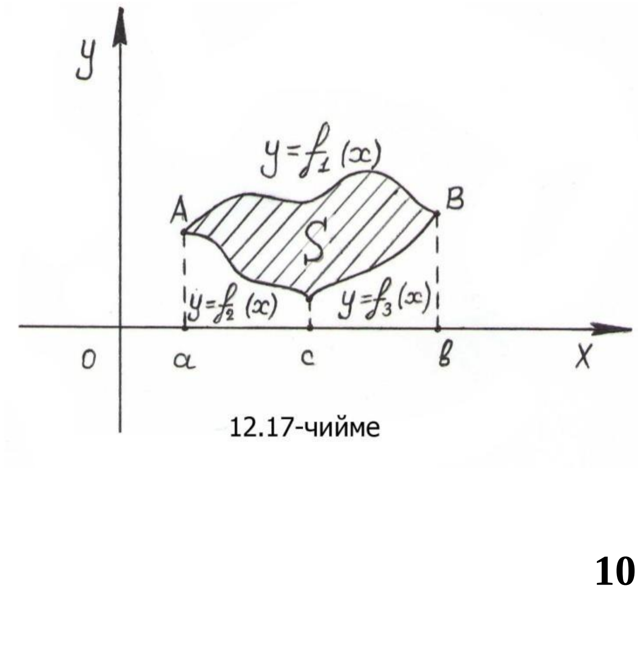
12.15-чийме

Мисалы 3) $y = \sin x$ функциясын графиги, абцисса огу жана $x = -\frac{4\pi}{7}$, $x = \pi$ түздөрү менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (12.16 – чийме).

► $\sin x = 0$ теңдемесин чыгарып $x = \text{c} = 0$ табабыз. Демек, $\left[-\frac{4\pi}{7},\ \pi\right]$ кесидисинде $y = \sin x$ функциясы абцисса огун $\text{c} = 0$ чекитинде кесип өтүп, $\left[-\frac{4\pi}{7},\ 0\right]$ аралыгында $\sin x \leq 0$ болуп графиги Ox огун төмөн жагында, ал эми $[0,\ \pi]$ аралыгында $\sin x \geq 0$ болуп, графиги жогору жагында жайгашканын көрөбүз. Ошондуктан (33) формуласын колдонуп, изделүүчү аянт



12.16-чийме



12.17-чийме

$S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{-\frac{4\pi}{7}}^{0} \sin x\ dx = -\cos x|_0^{\pi} + \cos x|_{-\frac{4\pi}{7}}^{0} =$

$-(\cos\pi - \cos 0) + \left(\cos 0 - \cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right)\right) = 3 - \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ аянт бирдигине барабар болорун көрөбүз.◀

4. Айталы, $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгон $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ функциялары менен чектелген фигура берилип,

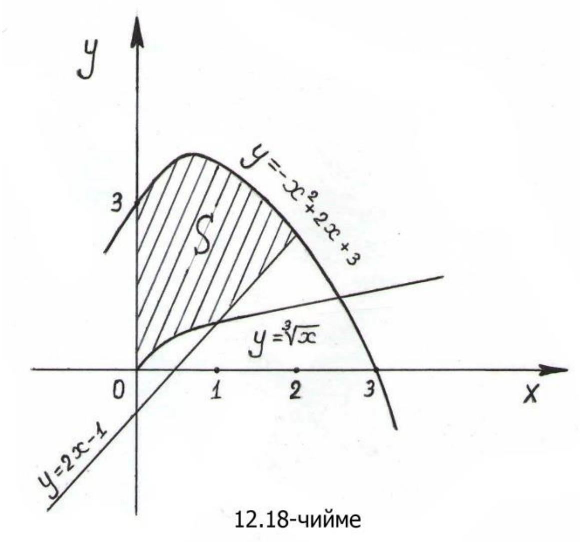
$$f_1(x) > f_2(x) > 0 \text{ жана}$$

$$f_1(x) > f_3(x) > 0$$

шарттарына баш ийишип, кесиндинин учтарында тең $f_1(a) = f_2(a) = A$, $f_1(b) = f_3(b) = B$, ал эми кесиндинин ички с $\in]a,\ b[$ чекитинде $f_2(c) = f_3(c)$ кесилишсин. Бул учурда берилген фигура ийри сызыктуу трапецияга караганда татаал көрүнүштө болгону менен, $aABb$ фигурасы бир канча ийри сызыктуу трапециялардын кесилишүүсүнөн келип чыгып, анын аянты

$$S = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^c f_2(x)\,dx - \int_c^b f_3(x)\,dx \qquad (33)$$

эрежеси менен эсептелет (12. 17 – чийме). Мисалы



12.18-чийме

4) $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2x - 1$,

$y = -x^2 + 2x + 3$ сызыктары жана Oy ордината огу менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (12.18 – чийме).

► $y = -x^2 + 2x + 3$ функциясы Oy ординатасы менен $x = 0$ болгондо (0; 3) чекитинде, ал эми $y = 2x - 1$ функциясы менен $x = 2$ болгондо $(2; 3)$ чекитинде кесилишерин көрөбүз. $y = \sqrt[3]{x}$ менен Oy ординатасы да $x = 0$ болгондо (0; 0) чекитинде, ал эми $y = 2x - 1$ менен $y = \sqrt[3]{x}$ функциялары өз ара $x =$ с $= 1$ болгондо (1; 1) чекитинде кесилишишет. Анда берилген фигуранын аянтын $[0,\ 2]$ кесиндисинде берилген ийри сызыктуу трапециянын аянтынан, $[1,\ 2]$ менен $[0,\ 1]$ кесиндилеринде

берилишкен ийри сызыктуу трапециялардын аянттарын кемитип салуу менен табылат. Берилген аралыкта

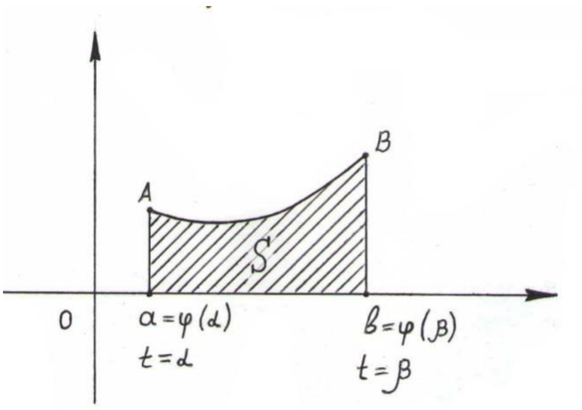
$-x^2+2x+3>\sqrt[3]{x}>0$ жана $-x^2+2x+3>2x-1>0$ шарты аткарылат. Демек, (33) формуласын колдоно алабыз.

$$S=\int_0^2(-x^2+2x+3)\,dx-\int_1^2(2x-1)\,dx-\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\Big|_0^2-(x^2-x)|_1^2-\frac{3}{4}\,x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1=\frac{55}{12}\,.\ \blacktriangleleft$$

5. Айталы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясы, кайсы бир t өзгөрүлмөсүнө карата $t\in[\alpha,\ \beta]$ аралыгында $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ параметрдик теңдеме менен берилсин. Мында $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$ функциялары $[\alpha,\ \beta]$ аралыгында үзгүлтүксүз жана $\varphi(\alpha)=a$,

$\psi(\beta)=b$ барабардыктары аткарылат деген шартка баш ийишет.



12.19-чийме

$aABb$ ийри сызыктуу трапециясын аянты

$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b y\,dx$

эсептелерин билебиз. Анык интегралды эсептөөдө $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу ыкмасын колдонуп, $dx=\varphi'(t)\,dt$ болгондуктан, жогорудагы барабардыктарга таянып интегралдын пределдерин алмаштырсак, параметрдик теңдеме менен берилген ийрилер аркылуу чектелген фигуранын аянтын

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt \qquad (34)$$

көрүнүштө эсептей алабыз (12.19 – чийме).

Мисалы 5) $\begin{cases} x = a\cos t\,, \\ y = b\sin t\,, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi,\ \ a, b > 0$ эллипси менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

► Берилген эллипс координата окторуна карата симметриялуу төрт бөлүктөн тургандыктан, алардын биринчи чейректегисин аянтын таап, 4 кө көбөйтүп коёбуз $S = 4\int_0^a y\,dx$. Биринчи чейректе $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$,

$dx = -a\,sint\,dt$ ⇨ $x = a\cos t$ ⇨ $x = a$ болсо, $a = a\cos t$ ⇨

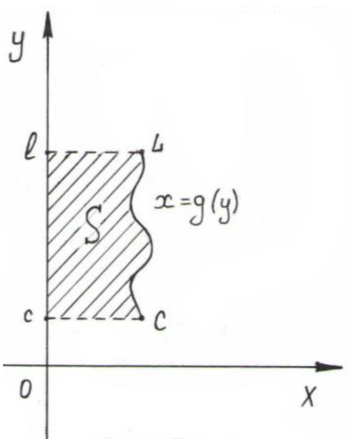
$\cos t = 1$ ⇨ $t = 0$; $x = 0$ болсо, $0 = a\cos t$ ⇨ $\cos t = 0,\ t = \frac{\pi}{2}$ келип чыгып, берилген аянтты

$$S = 4\int_0^a y\,dx = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t \cdot a\,sint\,dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 sin^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d(2t) =$$

$= 2ab\,t|_0^{\frac{\pi}{2}} - ab\sin 2t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2ab\pi}{2} = \pi ab$ табабыз.

6. Айрым учурларда фигуралардын аянттарын эсептөөдө интегралдоону x өзгөрүлмөсүнө караганда, y өзгөрүлмөсү боюнча жүргүзүү ыңгайлуу болот. Мындай учурда $y = f(x)$ теңдештигин теңдеме сыяктуу x ке карата чыгарып, y ке карата $x = \mathrm{g}(y)$ көрүнүштөгү функция түзүлөт ($c \le y \le l$, $a \le x \le b$) . Үзгүлтүксүз функциянын тескериси катарында $\mathrm{g}(y)$ функциясы



12.20-чийме

$c \le y \le l$ аралыгында аныкталып, $\forall\, y \in [c,\ l]$ чекиттеринде үзгүлтүксүз деп алынат. Демек, $y_1 = c,\ y_2 = l$ түздөрү, Oy огу жана $x = \mathrm{g}(y)$ функциясын графиги менен чектелген $\boldsymbol{clLC}$ жалпак фигуранын аянты (12.20 –чийме),

$$S = \int_c^l \mathrm{g}(y)\,dy \qquad (35)$$

формуласы боюнча эсептелет.

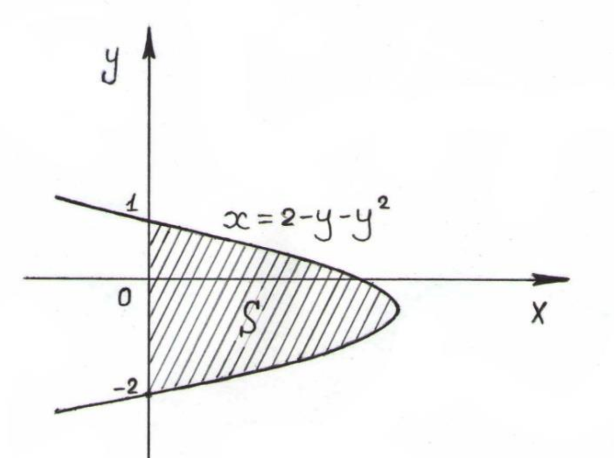
Мисалы, 6) $x = 2 - y - y^2$ функциясы жана ордината огу менен чектелген аянтты эсептегиле (12.21 – чийме).

► Берилген функцияны нөлгө теңдеп, $2 - y - y^2 = 0$ теңдемесинен $y_1 = c = -2,\ y_2 = l = 1$ чечимдерин аныктап, интегралдоо пределдерин табабыз. Анда (35) формуласы боюнча

$$S = \int_c^l \text{g}(y)\,dy = \int_{-2}^{1}(2 - y - y^2)\,dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$= 2 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \left(2 \cdot (-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5$ аянт бирд. табабыз. ◄

12.4.2 Полярдык координаталар системасында жалпак фигуралардын аянтын эсептөө

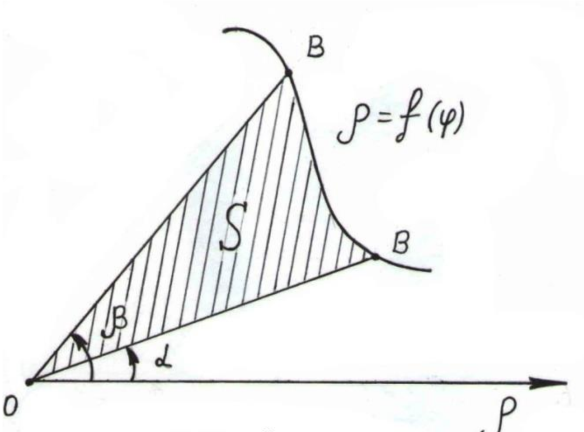


12.21-чийме

Айталы, полярдык координаталар системасында $\rho = f(\varphi)$ теңдемеси менен ийри берилип, $f(\varphi)$ функциясы $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ аралыгында үзгүлтүксүз жана оң функция болсун дейли. Берилген $\rho = f(\varphi)$ ийриси жана О координата башталмасынан чыккан, полярдык ок менен $\alpha,\ \beta$ бурчун түзгөн шоолалардын арасында чектелген жалпак фигураны ийри сызыктуу сектор деп атап, анын аянтын табуу аракетин көрөлү (12.22 – чийме).

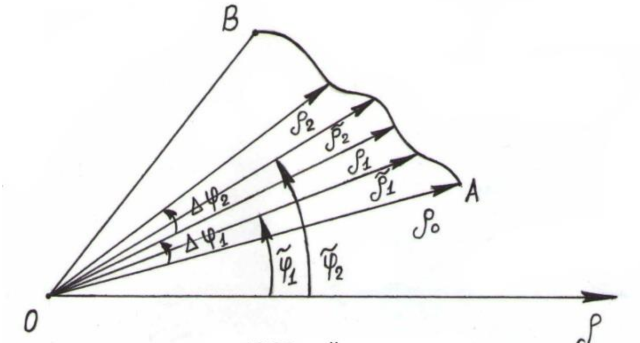
Чиймеде көрсөтүлгөн ОАВО ийри сызыктуу секторун О башталмасынан эркин абалда чыккан

$\varphi = \alpha = \varphi_0 < \varphi = \varphi_1 < \cdots < \varphi = \varphi_{n-1} < \varphi = \varphi_n = \beta$ шоолалары аркылуу n майда бөлүктөргө бөлүп, шоолалардын узундуктарын тиешелүү түрдө ρ_k сандары дейли (12.23 – чийме). Бул шоолалардын арасындагы борбордук бурчтар



12.22-чийме

$\Delta\varphi_1,\ \Delta\varphi_2,\ \dots\ ,\ \Delta\varphi_n$ болсун. φ_{k-1} жана φ_k шоолаларын арасынан эркин тандап $\widetilde{\varphi_k}$ бурчун алалы. Тандалган $\widetilde{\varphi_k}$ бурчуна туура келген радиус – вектордун узундугу $\widetilde{\rho_k} = f(\widetilde{\varphi_k})$ болсун. Анда борбордук $\Delta\varphi_k$ бурчуна туура келген ийри сызыктуу сектордун аянтын, радиусу $\widetilde{\rho_k}$ болгон тегеректин сектору катарында



12.23-чийме

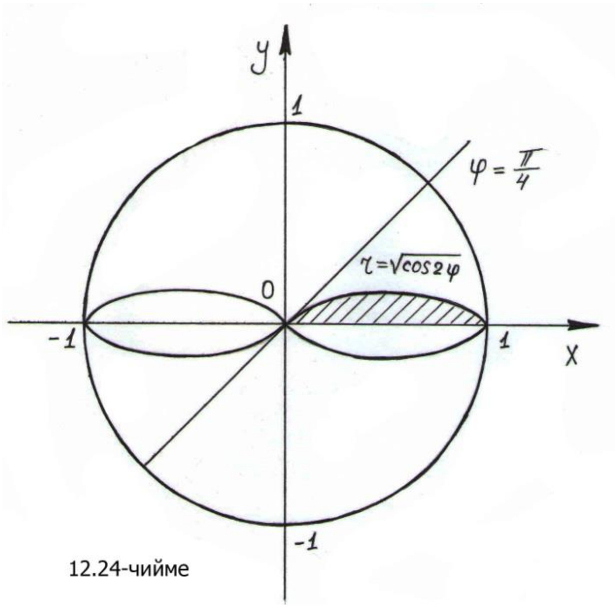
$\Delta s_k = \frac{1}{2}\tilde{\rho}_k^2 \cdot \Delta\varphi_k =$

$= \frac{1}{2} f^2(\widetilde{\varphi_k}) \cdot \Delta\varphi_k$ формуласы менен эсептөөгө болот ($k = 1, 2, \dots, n$). Ошентип, жалпы OABO ийри сызыктуу сектордун аянтын жакындаштырылган түрдө n сандагы жогорудагыдай тегеректин секторлорун аянттарынын суммасы катарында

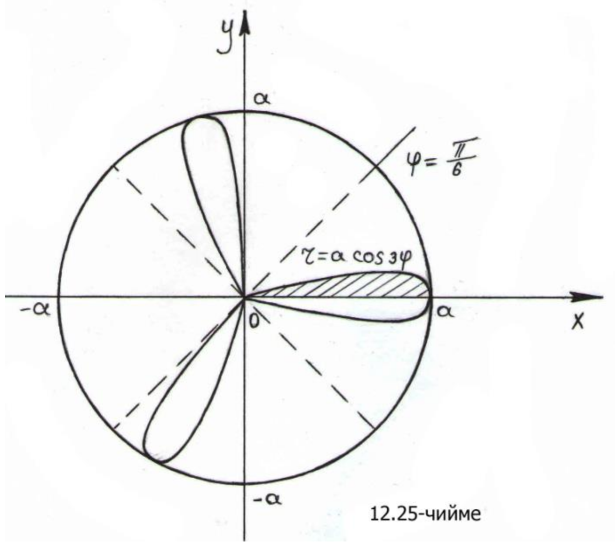
$$S_{\text{OABO}} \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f^2(\widetilde{\varphi_k}) \cdot \Delta\varphi_k$$

жазууга болот. Мындан бөлүүлөрдүн саны чексиз $n \to \infty$ көбөйгөндө $\Delta\varphi_k \to 0$ чексиз кичинерип, $\underbrace{max}_{1\le k\le n} \{\Delta\varphi_k\} = \lambda \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк, анда 12.2 аныктаманын негизинде бурчтун $[\alpha,\ \beta]$ кеңдигин (аралыгын) n майда бөлүктөргө бөлүп, түзүлгөн интегралдык сумманын пределдик мааниси катарында, ушул аралык боюнча $f^2(\varphi)$ функциясынан алынган алынган анык интегралга ээ болобуз

$$S_{\text{OABO}} = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f^2(\widetilde{\varphi_k})\cdot\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\varphi\,. \qquad (36)$$



12.24-чийме



12.25-чийме

Ошентип, (36) интегралын сандык мааниси, аянтын табуу талап кылынган OABO ийри сызыктуу секторун аянты болот.

11. Мисалдар

7) $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$ теңдемеси менен берилген Бернуллинин лемнискатын аянтын эсептегиле (12.24 – чийме).

► Лемниската координата окторуна карата симметриялуу жайгашкандыктан, анын жалпы аянты I – чейректеги бөлүгүн аянтын 4 кө көбөйтүп коюу менен табылат. Лемнискатанын I – чейректеги бөлүгү $\varphi = 0$ бурчунан башталып, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ бурчу менен бүткөндүктөн, (36) формуласын негизинде лемнискатанын аянтын

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(\varphi)\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d(2\varphi) =$$

$= \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$ табабыз.◄

8) $\rho = a\cos 3\varphi$ үч теңгелүү розанын аянтын тапкыла (12.25 - чийме).

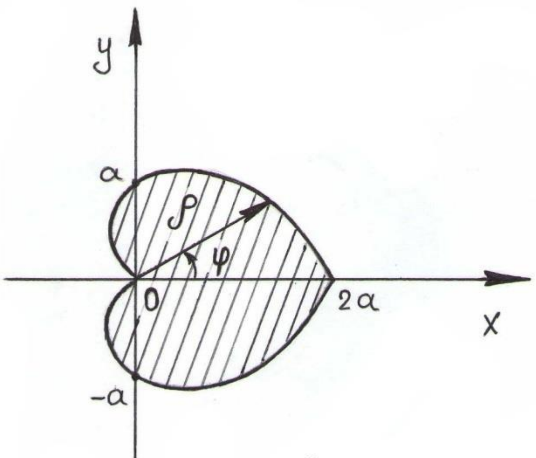
► Берилген теңдемелүү үч теңгелүү роза бирдей аянттагы 6 бөлүктөн тургандыктан, алардын I – чейректеги бөлүгүн аянтын таап 6 га көбөйтүп коёбуз. Үч теңгелүү розанын I – чейректеги бөлүгү $\varphi = 0$

бурчу менен башталып, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ бурчу менен бүткөндүктөн, (36) формуланын негизинде талап кылынган

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} f^2(\varphi)\, d\varphi = S = 6a^2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^2 3\varphi\, d\varphi = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi + \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 6\varphi\, d\varphi = \frac{3a^2}{2} \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{3a^2}{12}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 6\varphi\, d(6\varphi) = \frac{\pi a^2}{4} +$$

$+\frac{a^2}{4} \cdot \sin 6\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{4}(\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi a^2}{4}$ аянт бирдигин табабыз. ◄



12.26-чийме

9) $\rho = a(1+\cos\varphi),\ a > 0$ кардиоидасы менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла (12.26 – чийме).

► φ бурчу $0 \le \varphi \le 2\pi$ аралыгында өзгөргөн кезде кардиоида ийриси толук сызылып бүткөндүктөн, (36) формуладан

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a(1+\cos\varphi)]^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\varphi + cos^2\varphi)\, d\varphi =$$

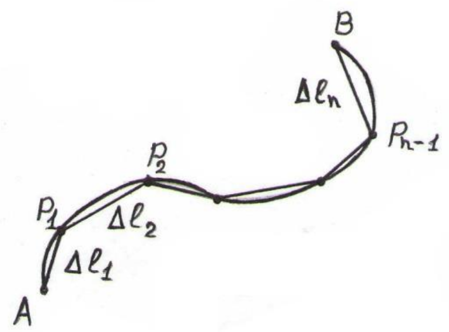
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

кардиоиданын аянтын аныктайбыз.

12.4.3 Жалпак ийринин узундугун эсептөө

Айталы A чекитинен башталып, B чекитинде бүткөн $\overset{\frown}{AB}$ ийриси берилсин. Берилген ийрини эркин түрдө $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_{n-1}$ чекиттери аркылуу n майда бөлүктөргө бөлүп, аларды хорда сызыктары менен туташтырып, $\overset{\frown}{AB}$ ийрисине ичтен сызылган



12.27-чийме

$AP_1,\ P_1P_2,\ \dots,\ P_{n-1}B$ сынык сызыктарын курайлы (12.27 – чийме). Сынык сызыктардын узундуктарын тиешелүү түрдө $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ десек, анда $\overset{\frown}{AB}$ ийрисине ичтен сызылган $AP_1P_2\dots P_{n-1}B$ сынык сызыгын L_n периметрин, бөлүкчө сынык сызыктардын узундуктарын суммасы

$$L_n = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k$$

катарында кароого болот.

12.4 Аныктама. $\overset{\frown}{AB}$ *ийри сызыгын узундугу L деп, ага ичтен сызылган сынык сызыктардын тутумунда турган бөлүктөрдүн эң узуну $max\{\Delta l_k\} \to 0$ умтулгандагы L_n периметрин пределдик маанисин айтабыз*

$$L = \lim_{max\{\Delta l_k\}\to 0} L_n = \lim_{max\{\Delta l_k\}\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k .$$

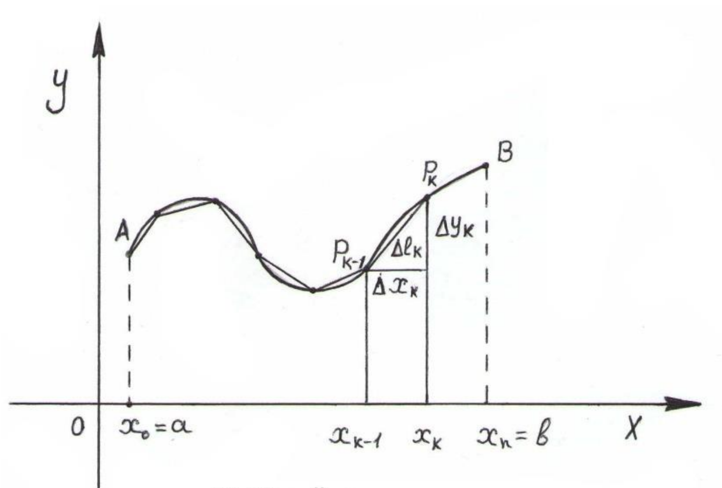
Эгерде бул пределдин мааниси $P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_{n-1}$ чекиттерин тандоодон көз каранды болбостон бир манилүү жашаса, анда $\overset{\frown}{AB}$ ийриси түздөлүүчү ийри деп аталат.

I. Тик бурчтуу координаталар системасында ийринин узундугу. Айталы, $\overset{\frown}{AB}$ ийриси $[a,\ b]$ кесиндисинде биринчи тартиптеги $f'(x)-$ туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болгон $y = f(x)$ функциясын графиги болсун ($f(x) \in C^1[a,\ b]$). Берилген кесиндини

эркин тандалган $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$ чекиттери менен n майда бөлүктөргө бөлөлү.

Бул $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ бөлүктөрүн учтарындагы функциянын $f(x_k)$ маанилерин эсептеп, $y = f(x)$ ийрисине ичтен чокулары $(x_k; f(x_k))$:

$$A = P_0(x_0; f(x_0)),\ \ P_1(x_1; f(x_1)), \ldots, P_n(x_n; f(x_n)) = B$$



12.28-чийме

координаталары менен берилген сынык сызыктарды сызалы. Ар бир бөлүккө тиешелүү сынык сызыктардын узундуктарын $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ көрүнүштө белгилеп, алардын координаттык октордогу проекцияларын

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$ деп алсак, анда Пифагордун теоремасы боюнча $k-$ бөлүкчө сынык сызыктын узундугу $(\Delta l_k)^2 = (\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2$ экендигин көрөбүз (12.28 – чийме).

Мындан $\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\ \Delta x_k$ табабыз.

Экинчи жактан, $f(x) \in C^1[a,\ b]$ болгондуктан $[a,\ b]$ кесиндисин каалагандай $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчөсүндө дифференцирленүүчү болуп, Лагранждын теоремасын шарттарын (2 – бөлүк, 9.6.2 – ни кара) канааттандыргандыктан, бул бөлүкчөдөн $c_k \in [x_{k-1},\ x_k]$ чекити табылып,

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

же $\Delta y_k = f'(c_k)\,\Delta x_k$ барабардыгы орун алат. Ошондуктан бөлүкчө Δl_k сынык сызыгын узундугун

$$\Delta l_k = \sqrt{1 + \left(\frac{f'(c_k)\,\Delta x_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k = \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k$$

көрүнүшкө келтирип, $\breve{AB}$ ийрисине ичтен сызылган сынык сызыктардын тутумунун периметрин, $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясынын $[a,\ b]$ кесиндисиндеги интегралдык суммасы

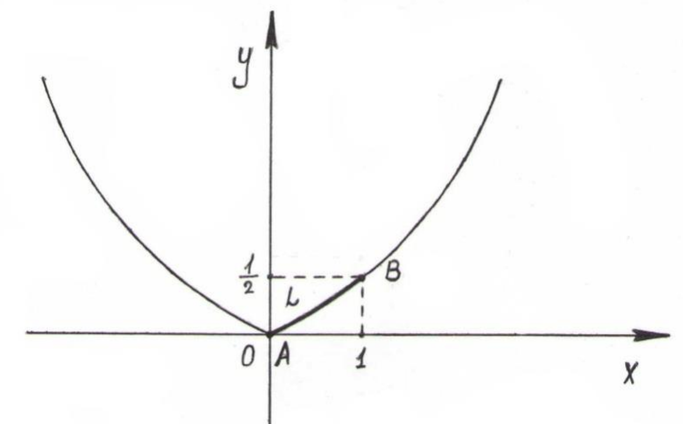
$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k$$

катарында жаза алабыз.

$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгондуктан, берилген аралыктагы интегралдык сумманын $max\{\Delta l_k\} \to 0$ умтулгандагы предели жашап, ал $\breve{AB}$ ийрисин узундугуна, же болбосо ушул аралыкта $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясынан алынган анык интегралга барабар болот

$$\lim_{max\{\Delta l_k\}\to 0} L_n = \lim_{max\{\Delta l_k\}\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\,.$$

Ошентип, $\forall x \in [a,\ b]$: $y = f(x)$ теңдемеси менен берилген $\breve{AB}$ ийрисин L узундугу



12.29-чийме

$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ же

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2}\,dx \qquad (37)$$

формуласы менен эсептелет.

Мисалы, 10) $y = \frac{1}{2}x^2$ параболасын A$(0; 0)$ жана B$\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$ чекиттерин аралыгында жайгашкан жаасынын узундугун эсептегиле.

► $y' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$ эске алып, 12.29 – чиймеде көрсөтүлгөн параболанын жаасынын узундугун (37) формуладан

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[y']^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]\Big|_0^1 =$$

$= \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}$ көрүнүштө табууга болот.◄

2. Параметрдик теңдеме боюнча ийринин узундугун эсептөө. Айталы, $\breve{AB}$ ийриси $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгон $y = f(x)$ функциясынан башка да $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t_0 \leq t \leq T$ параметрдик теңдемеси менен берилсин. Мында $\forall t \in [t_0,\ T]$ кесиндисинде $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялары $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ туундулары менен кошо үзгүлтүксүз жана $a = \varphi(t_0),\ b = \varphi(T),\ \varphi'(t) \neq 0$ шарттарына баш ийет деп эсептелет. Бул учурда, $y = f(x)$ функциясын туундусу менен параметрдик теңдемелердин туундуларын арасындагы байланыш $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ көрүнүштө болорун билебиз. Андай болсо, (37) формулада ордуна коюуларды жүргүзүп

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[y']^2}\,dx = \int_{t_0}^{T} \sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\,d\varphi(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \sqrt{\frac{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}{[\varphi'(t)]^2}}\,\varphi'(t)\,dt = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\,,$$

параметрдик теңдеме боюнча $\breve{AB}$ ийрисин узундугун эсептөөчү

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \text{ же } L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt \quad (38)$$

формулаларына ээ болобуз.

Мисалы, 11) $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi,\ a > 0$ циклоидасын биринчи айлампасын (I – аркасын) узундугун тапкыла (12.30 – чийме).

► $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_t = a\sin t$ маанилерин коюп, (38) формуласы менен берилген циклоиданын I – аркасын

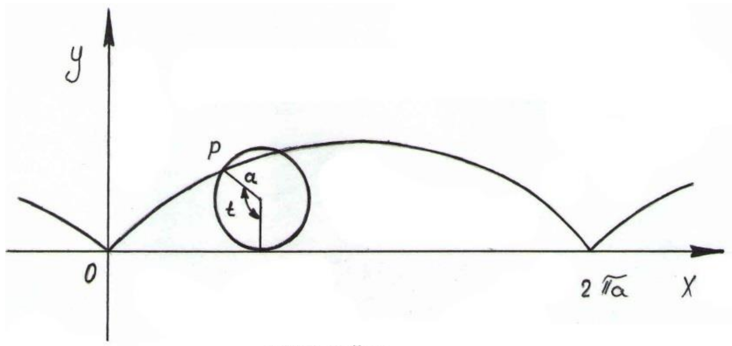
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2}\, dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} dt =$$

$= -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a$ узундугун табабыз.◄

3. Полярдык координаталарда ийринин узундугун эсептөө. Айталы, $\breve{AB}$ ийриси $\alpha \le \varphi \le \beta$ аралыгында полярдык координаталар системасында өзгөргөн $\rho = f(\varphi)$ теңдемеси менен берилип, $f(\varphi)$

функциясы $\forall\varphi \in [\alpha,\ \beta]$ аралыгында үзгүлтүксүз $f'(\varphi)$ туундуга ээ болсун. Бул учурда $\breve{AB}$ ийрисин узундугун эсептөө үчүн, ийринин полярдык координаталар системасындагы теңдемесин, параметрдик теңдемеге өзөртүп түзөбүз. Ал үчүн $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\, sin\,\varphi \end{cases}$ байланыш формулаларын пайдаланып ρ нун ордуна $f(\varphi)$ ни коюп, $\breve{AB}$ ийрисин φ параметринен гана көз каранды болгон



12.30-чийме

$\begin{cases} x = f(\varphi)\cos\varphi, \\ y = f(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ параметрдик теңдемесине ээ болобуз.

$$\begin{cases} x'_\varphi = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi, \\ y'_\varphi = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$$

туундуларын эки жактарын тең квадратка көтөрүп кошсок,

$\left(x'_\varphi\right)^2 + (y'_\varphi)^2 = [f'(\varphi)]^2 + [f(\varphi)]^2$ теңдештиги келип чыгат. Анда (38) формуласын колдонуп $\breve{AB}$ ийрисин узундугун

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2 + (y'_\varphi)^2}\, d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\varphi)]^2 + [f(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

$$\text{же} \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi \qquad (39)$$

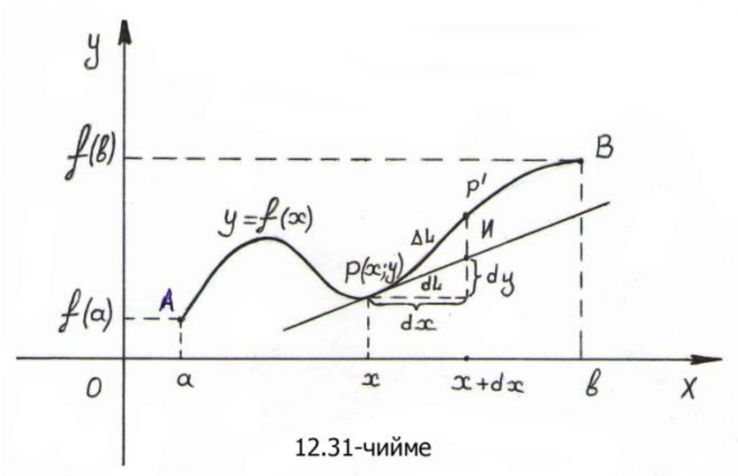
формуласы менен эсептей алабыз. Мисалы, жогорудагы кардиоданын I – аркасы $\rho = a(1 - \cos\varphi),\ a > 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$ полярдык теңдемеси менен берилгендиктен, анын узундугу (39) формуласы боюнча да

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1-\cos\varphi)]^2 + [(a(1-\cos\varphi))']^2}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + cos^2\varphi + sin^2\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sqrt{sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a \text{ табылат.}$$

12.4.4 Ийринин жаасынын узундугун дифференциалы



12.31-чийме

Айталы, $y = f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз $f'(x)$ туундусуна ээ болуп, графиги $\mathrm{A}(a; f(a))$ чекитинен башталып, $\mathrm{B}(b; f(b))$ чекитинде бүткөн $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ ийриси болсун. Бул ийриде эркин кыймылда өзгөргөн $\mathrm{P}(x;\ f(x))$ чекитин алалы. Анда берилген ийринин A чекитинен башталып, P чекитинде бүткөн $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ жаасын узундугун x ке карата функция деп эсептеп, (37) анык интегралын жардамы менен $[a,\ x]$ кесиндисинде жогорку предели өзгөрүлмө болгон интеграл же функция катарында,

$$L(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

көрүнүштө эсептөөгө болот (12.31 – чийме). $\sqrt{1+[f'(t)]^2}$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болгондуктан, анын туундусу жашап,

$$\frac{dL(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt\right) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

$$\text{же} \quad \frac{dL}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

көрүнүштө эсептелет. Мындан $\breve{AP}$ жаасынын узундугун дифференциалын

$$dL = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx \quad \text{же} \quad dL = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \qquad (40)$$

эсептөөчү формула келип чыгат.

Геометриялык жактан $\breve{AP}$ жаасынын узундугун дифференциалы dL деп, $y = f(x)$ функциясын графигине $P(x;\ f(x)) = P(x;y)$ чекитинде жүргүзүлгөн PT жаныма түзүндө жаткан $P(x;y)$ жана

$N(x+dx;y+dy)$ чекиттерин туташтырган PN кесиндисин узундугун айтабыз. Ошентип, аргументтин жетишерлик кичине $x+dx$ козголуусуна жооп берген $y = f(x)$ функциясын, жетишерлик кичине

$\Delta L \equiv \Delta f = f(x+dx) - f(x)$ козголуу чоңдугу, жакындаштырылган түрдө PN кесиндисин узундугуна тең болот, б.а.

$\Delta L = |PP'| \approx dL = |PN|$ (12.31 – чийме).

Эгерде ийри параметрдик $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t_0 \le t \le T$ теңдемелери менен берилип, $[t_0,\ T]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ туундулары жашаса, анда (40) формуладан

$$dL = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\,dt \quad \text{же} \quad dL = \sqrt{\left(x'_t\right)^2+(y'_t)^2}\,dt \qquad (41)$$

келип чыгат. Бул формулаларда t параметри катарында өзгөрүлмө L жаасын узундугун $\begin{cases} x = \varphi(L), \\ y = \psi(L) \end{cases}$ алсак, анда (41) ден

$$dL = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dL}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dL}\right)^2}\, dL \quad \text{же} \quad \left(\frac{d\varphi}{dL}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dL}\right)^2 = 1 \qquad (42)$$

келип чыгат.

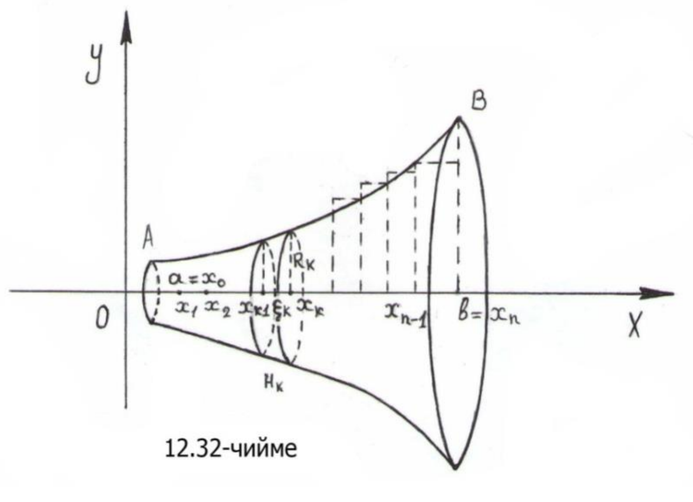
Эгерде ийри $\rho = f(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$ полярдык координаталардагы теңдеме менен берилип, $f(\varphi)$ функциясын $\forall\varphi \in [\alpha,\ \beta]$ аралыгында үзгүлтүксүз $f'(\varphi)$ туундусу жашаса, анда ийринин жаасын узундугун дифференциалын

$$dL = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi \qquad (43)$$

көрүнүштө эсептөөгө болот.

12.4.5 Айлануудан пайда болгон фигуралардын көлөмүн жана бетинин аянтын эсептөө

1. Айталы, $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз жана оң болгон $y = f(x)$ функциясын графиги, Ox огу жана $x = a,\ x = b$ түздөрү менен чектелген жалпак $aABb$ ийри сызыктуу трапециясы берилсин. $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын Ox огунун айланасында айлантуудан келип чыккан телонун көлөмүн эсептөө маселесин карайлы (12.32 – чийме). Ал үчүн, $[a,\ b]$ кесиндисин эркин алынган $a = x_0,\ x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n = b$ чекиттери аркылуу, n майда бөлүктөргө бөлөлү. Бул бөлүктөрдүн каалаган бирин $[x_{k-1},\ x_k]$ деп, андан $\xi_k \in [x_{k-1},\ x_k]$ чекитин тандап, $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчөсүн Ox огун айланасында



12.32-чийме

айлантуудан соң бийиктиги $H_k = \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, радиусу $R_k = f(\xi_k)$ болгон цилиндрче келип чыгат деп элестетели. Анда бул бөлүкчө цилиндрченин көлөмү

$V_k = \pi {R_k}^2 \cdot H_k = \pi f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ көрүнүштө эсептелип, айлануудан пайда болгон телонун көлөмү, бөлүкчө көлөмдөрдүн суммасы катарында

$$V \approx \sum V_k = \pi \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

жакындашкан көрүнүштө эсептелет. Эгерде бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйтсөк $n \to \infty$, $\lambda = \underbrace{max}_{0 \le k \le n} \{\Delta x_k\} \to 0$ умтулуп, акыркы сумма V көлөмүнө жакындап жетет. Андай болсо, 12.2 аныктаманын негизинде айлануудан пайда болгон телонун көлөмү, интегралдык сумманын предели катарында,

$$V = \pi \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2\,(x) dx \text{ же}$$

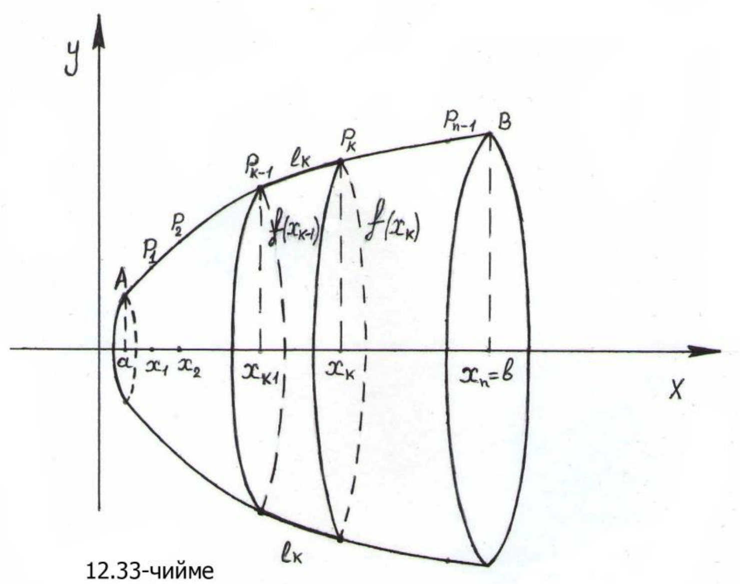
$$V = \pi \int_a^b f^2\,(x) dx \qquad (44)$$

формуласы менен эсептелери келип чыгат.

Мисалы, 12) $y = x^2$ функциясы жана $x = 0, x = b$ түздөрү менен чектелген жалпак фигураны Ox огунун айланасында айлантуудан келип чыккан телонун көлөмү, (44) формулага ылайык

$V = \pi \int_a^b f^2\,(x) dx = \pi \int_0^b x^4\, dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^b = \frac{\pi b^5}{5}$ көлөм бирдигине барабар болот.

2. Жогоруда каралган $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын, Ox огун айланасында айлантуудан келип чыккан телонун бетинин аянтын эсептөө маселесине токтололу. x_k бөлүү чекиттеринен ($k = 0, 1, \dots, n$) Оу огуна параллель түздөрдү жүргүзүп, алар менен $\overset{\smile}{AB}$ ийриси кесилишкен P_k чекиттерин хордалар менен байланыштырып, $\overset{\smile}{AB}$ ийрисин каптаган А $P_1P_2 \dots P_{n-1}B$ сынык сызыктарын тутумуна ээ болобуз. Айлануу кезинде сынык сызыктардын тутуму, түзүүчөлөрү сынык сызыктар (хордалар) болушкан кесилген конусчаларды түзүшөт (12.33 – чийме). Бөлүүдө $[x_{k-1},\ x_k]$ кесиндисине туура келген $P_{k-1}P_k$ бөлүкчө хордасын Ox огун айланасында айлантуудан кийин, түзүүчүсү $\Delta l_k = |P_{k-1}P_k|$ - хордасын узундугу, орточо радиусу $R_k = \frac{f(x_{k-1})\ +\ f(x_k)}{2}$ болгон кесилген конусча келип чыгат десек, анда кесилген конусчанын каптал бетинин аянтын



12.33-чийме

$$s_k = 2\pi R_k \cdot l_k = 2\pi \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \cdot \Delta l_k = \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \cdot \Delta l_k =$$

$= \pi[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \cdot \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\, \Delta x_k$ көрүнүштө эсептөөгө болот.

Мында

$\Delta l_k = \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\, \Delta x_k,\ c_k \in [x_{k-1},\ x_k].$

Анда $\overset{\smile}{AB}$ ийрисин каптап сызылган $AP_1P_2 \dots P_{n-1}B$ сынык сызыктарын айлантуудан келип чыккан телонун каптал бетинин аянты,

$2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функциясына карата түзүлгөн

$$S_n \approx \sum s_k = \pi \sum_{k=1}^{n} [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \cdot \sqrt{1 + [f'(c_k)]^2}\, \Delta x_k$$

интегралдык сумма болоруна күбө болобуз. Мындан бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйтүп, же $\lambda = \underbrace{max}_{0\le k\le n}\{\Delta x_k\} \to 0$ умтулгандагы пределге өтөлү. Анда сынык сызыктардын тутуму $\overset{\frown}{AB}$ ийрисине, ал эми

$f(x_{k-1}) \leftrightarrow f(x_k)$ бири – бирине жана $\sum\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k \;\to\; \overset{\frown}{AB}$ ийрисин узундугуна умтулушат. Демек, Ox огунун айланасында $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын айлантуудан келип чыккан телонун каптал бетин аянтын

$$S = \pi\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)]\cdot\sqrt{1+[f'(c_k)]^2}\,\Delta x_k =$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \quad \text{же}$$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,, \qquad (45)$$

формуласы менен эсептөөгө болот.

Мисалы, 13) $[0,\ 2]$ кесиндисинде берилген $y=\sqrt{x}$ функциясын, Ox огун айланасында айлантуудан келип чыккан параболоиддин каптал бетин аянтын тапкыла.

► $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ болгондуктан, (45) формуласын пайдаланып

$$S = 2\pi\int_0^2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]^2}\,dx = \pi\int_0^2\sqrt{1+4x}\,dx = \left|\begin{matrix} u=1+4x,\ du=4dx; \\ x=0\Leftrightarrow u=1, \\ x=2\Leftrightarrow u=9\end{matrix}\right| =$$

$= \frac{\pi}{4}\int_1^9\sqrt{u}\ du = \pi\frac{u^{\frac{3}{2}}}{6}\Big|_1^9 = \frac{13\pi}{3}$ аянт бирдигин табабыз.◄

§ 12.5 Анык интегралдын физикалык колдонулуштары

12.5.1 Өзгөрүлмө күчтүн жумушу

Нерсени S аралыгына мажбурлап которгон F турактуу күчүн аткарган жумушу $A = F\cdot S$ формуласы менен эсептелери белгилүү.

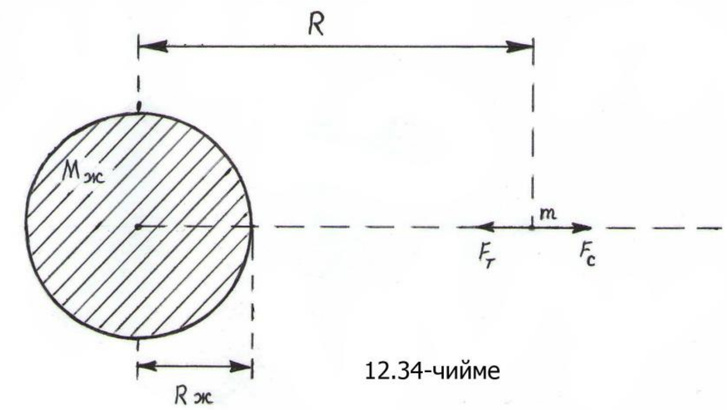
Айталы, $[a,\ b]$ кесиндисин ар бир x чекитинде, өзгөрүлмө $F = F(x)$ күчү, Ox огу боюнча a чекитинде жайгашкан материалдык чекитти, b чекитине мажбурлап которсун. $[a,\ b]$ кесиндисин эркин тандалган $a = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n = b$ чекиттери аркылуу n майда бөлүктөргө бөлөлү. Жетишерлик кичине $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ бөлүкчө аралыгынан $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ чекитин тандап, ушул майда бөлүкчөдө күчтү турактуу $F(\xi_k)$ санына барабар деп ойлойлу, анда бул бөлүкчөдөгү күчтүн аткарган жумушун жакындаштырылган түрдө $\mathrm{A}_k = F(\xi_k)\Delta x_k$ санына барбар деп эсептөөгө болот. Мындай бөлүкчөлөрдүн саны n ге барабар болгондуктан, жалпы $[a,\ b]$ кесиндисиндеги өзгөрүлмө жумушту $F(x)$ функциясынын

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$$ интегралдык суммасы сыяктуу жазууга болот.

Эгерде бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйтсөк, анда $\lambda = \underbrace{max}_{0 \le k \le n} \{\Delta x_k\} \to 0$ умтулуп, интегралдык сумманын предели 12.2 аныктамага ылайык, $F(x)$ тен $[a,\ b]$ аралыгы боюнча алынган анык интегралга

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b F(x)\, dx \text{ же } \mathrm{A} = \int_a^b F(x)\, dx \qquad (46)$$

барабар болот. Демек (46) формуласы, өзгөрүлмө $F(x)$ күчүн аткарган жумушун эсептөө эрежеси болот.



12.34-чийме

Мисалы, 1) Жердин бетинде жайгашкан массасы m болгон телону, жердин борборунан R узактыктагы космостук мейкиндиктин чекитине которулууга мажбурлаган, сырткы күчтүн минималдык жумушун эсептегиле (12.34 – чийме).

► Бүткүл дүйнөлүк тартылуу күчүн таасири менен жердин бетинде жайгашкан масссасы m болгон телону $F_\text{Т} = \gamma \frac{m \cdot M_\text{ж}}{r^2} = F_\text{Т}(r)$ тартылуу

күчү кармап турат. Мында $\gamma -$ гравитация турактуулугу, $M_ж -$ жердин массасы, $r -$ телонун жердин борборунан алыстоосун мүнөздөгөн өзгөрүлмө аралык. Телону жердин бетинен космостук мейкиндикке мажбурлап көторуучу карама – каршы багытка аракет кылган

$F_С = F_C(r)$ сырткы күч, $F_Т$ тартылуу күчүнөн чоң $F_С \geq F_Т$ болсо гана, тело жерден көтөрүлө алат. $F_С$ күчүнүн минималдык A_{min} жумушу, таймашкан эки күч теңдешкен пределдик $F_С(r) = F_Т(r)$ абалда аткарылышы мүмкүн. Бул абалды эске алып, телону жерден R бийиктигине көтөргөн сырткы $F_С(r)$ күчүн минималдык жумушун, жердин $R_ж$ радиусунан космос мейкиндигиндеги R чекитине чейин аткарылган жумуш катарында (46) формуласы менен эсептеп,

$$A_{min} = \int_{R_ж}^{R} F_С(r)dr = \int_{R_ж}^{R} F_Т(r)dr = \int_{R_ж}^{R} \gamma \frac{m \cdot M_ж}{r^2} dr = \gamma m \cdot M_ж \int_{R_ж}^{R} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \gamma m \cdot M_ж \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{R_ж}^{R} = \gamma m \cdot M_ж \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{R_ж}\right) = \gamma m \cdot M_ж \left(\frac{1}{R_ж} - \frac{1}{R}\right)$$

минималдык жумушту табабыз. Аткарылган жумуштун сандык маанисине карап, тело жердин бетинен космос мейкиндигин чексиз алыстатылган чекиттерине которулганда же $R \to \infty$ умтулганда, сырткы $F_С$ күчүн минималдык жумушу $A_{min}(\infty) = \frac{\gamma m \cdot M_ж}{R_ж}$ көрүнүштө болорун байкайбыз.◄

Эскерте кетүүчү нерсе, биздин эсептөөлөрдө массасы m *болгон телого, күн сыяктуу башка космостук обьекттердин таасири эске алынбады.*

12.5.2 Которулууну жана жолду эсептөө

1. Сызыктуу которулуу. Эгерде Ox огун бойлоп түз сызыктуу кыймылда болгон материалдык чекиттин, $t \in [t_0,\ T]$ аралыгында басып өткөн жолу, $x = x(t)$ теңдемеси менен берилгени белгилүү болсо, анда байкоонун $t = t_1$ убактысынан $t = t_2$ убактысына чейинки ($t_1,\ t_2 \in [t_0,\ T]$), материалдык чекиттин которулуу аралыгын $К = x(t_2) - x(t_1)$

көрүнүштө эсептөөгө болот. Экинчи жактан, $t \in [t_0,\ T]$ аралыгында материалдык чекиттин ылдамдыгы t убактысына карата $v = \varphi(t)$ мыйзамы (функциясы) боюнча өзгөрөрү белгилүү болсун, анда сызыктуу кыймылдын ылдамдыгы жолдон убакыт боюнча алынган туундуга барабар болгондуктан (2 – бөлүк, 9.1.1 ди кара),

$v = \varphi(t) = \frac{dx(t)}{dt}\ , t \in [t_0,\ T]$ теңдештиги орун алат. Мындан убакыттын $[t_1,\ t_2]$ бөлүгүндө материалдык чекит

$$К = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt \qquad (47)$$

аралыгына которулары келип чыгат. Ошентип, Ox огун бойлоп сызыктуу кыймылда болгон материалдык чекит убакыттардын $t = t_1$ жана $t = t_2$ аралыгында бир багытта $(\varphi(t) \geq 0\ , t \in [t_0,\ T])$ кыймылдаса, анда убакыттын ушул аралыгында

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt \qquad (48)$$

узундуктагы, ал эми эки башка багыттарга өзгөргөн кыймылда болсо,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi(t)|\, dt, \qquad (49)$$

узундуктагы жолдорду толук басып өтөрүн көрөбүз.

Мисалы, 2) Жердин бетинен асманга карата тике бийиктикке v_0 баштапкы ылдамдыгы менен таш ыргытылган. Абанын каршылыгын эсепке албастан, таштын: а) $H_к -$ көтөрүлүү бийиктигин; б) $t_к -$ көтөрүлүү убактысын; в) Т $-$таштын жерден көтөрүлүп, толук учуп жерге кайра түшкөнгө чейинки убакытты; г) К$-$ таштын жыйынтыктоочу которулуу аралыгын; д) $S -$ таштын толук учуу жолун аныктагыла.

► Ыргытылган таш адегенде вертикалдык жогору Ox, кийин Ot огун бойлогон сызыктуу кыймылда болуп, түшөрдө төмөн карай багыттарда өзгөрүп турары белгилүү. Жердин бетине жакын кыймылдаган тело, абанын каршылыгын эске албаган учурда бир калыпта ылдамдануучу

(бир калыпта өзгөрүүчү) кыймылда болуп, физиканын $v(t) = v_0 - \mathrm{g}\,t$ закону боюнча өзгөрөрү белгилүү. Мында $\mathrm{g}-$ эркин түшүүнүн ылдамдануусу болгон турактуу сан , ал эми убакыттын $t = 0$ ирмеми деп таш ыргытылган ирмемди алабыз. Алгачкы ирмемдерде таш вертикалдык багытта түз кетет деп ойлоп, Ox огун вертикалдык сызык катары эсептеп, аны бойлоп кеткен сызыктуу кыймыл $v(t) \geq 0$ оң болгон $t_к$ ирмемине чейин уланып, $v(t_к) = 0$ болору менен токтойт деген бүтүм чыгарабыз. Кыймылдоо законун нөлгө теңдеп, $v_0 - \mathrm{g}\,t = 0$ теңдемесинен көтөрүлүү убактысын $t_к = \frac{v_0}{\mathrm{g}}$ табууга болот. Көтөрүлүү бийиктиги убакыттын $[0,\ t_к]$ аралыгындагы таштын которулуусу болгондуктан, (47) формуласы боюнча

$$H_к = \int_0^{t_к} v(t)dt = \int_0^{t_к} (v_0 - \mathrm{g}\,t)dt = \left(v_0 t - \frac{\mathrm{g}t^2}{2}\right)\Big|_0^{t_к} = v_0 t_к - \frac{\mathrm{g}{t_к}^2}{2} =$$

$= \frac{{v_0}^2}{2\mathrm{g}}$ көрүнүштө эсептелет. Ал эми таш канчалык аралыкка көтөрүлсө, кайрадан ошончолук аралыкка түшөт деп, $t = 0$ ирмеминен $t = \mathrm{T}$ убактысына чейинки таштын толук басып (учуп) өткөн жолун

$S = 2H_к = \frac{{v_0}^2}{\mathrm{g}}$ аныктоого болот. Экинчи жактан (49) боюнча

$$S = \int_0^{\mathrm{T}} |v(t)|dt = \int_0^{t_к} (v_0 - \mathrm{g}\,t)dt + \int_{t_к}^{\mathrm{T}} [-(v_0 - \mathrm{g}\,t)]dt =$$

$$= \frac{{v_0}^2}{2\mathrm{g}} + \int_{t_к}^{\mathrm{T}} (\mathrm{g}\,t - v_0)dt = \frac{{v_0}^2}{2\mathrm{g}} + \left(\frac{\mathrm{g}t^2}{2} - v_0 t\right)\Big|_{t_к}^{\mathrm{T}} = \frac{{v_0}^2}{2\mathrm{g}} + \frac{\mathrm{g}\mathrm{T}^2}{2} - v_0\mathrm{T} -$$

$$-\frac{\mathrm{g}{t_к}^2}{2} + v_0 t_к = \frac{{v_0}^2}{2\mathrm{g}} + \frac{\mathrm{g}\mathrm{T}^2}{2} - v_0\mathrm{T} + \frac{{v_0}^2}{2\mathrm{g}} = \frac{{v_0}^2}{\mathrm{g}} + \frac{\mathrm{g}\mathrm{T}^2}{2} - v_0\mathrm{T}\ \text{аныкталат.}$$

Эки ыкма менен табылган S тин маанилерин $\frac{{v_0}^2}{\mathrm{g}} = \frac{{v_0}^2}{\mathrm{g}} + \frac{\mathrm{g}\mathrm{T}^2}{2} - v_0\mathrm{T}$ теңдеп, $\frac{\mathrm{g}\mathrm{T}^2}{2} - v_0\mathrm{T} = 0$ теңдемесинен $\mathrm{T}_1 = 0,\ \mathrm{T}_2 = \frac{2v_0}{\mathrm{g}}$ чечимдерин таап, $\mathrm{T} \neq 0$ болгондуктан, таштын толук учуу убактысын $\mathrm{T} = \frac{2v_0}{\mathrm{g}} = 2t_к$ аныктайбыз. Мындан көтөрүлүү жана түшүү убактылары тең болорун көрөбүз. (47) боюнча таштын жыйынтыкталган которулуусун

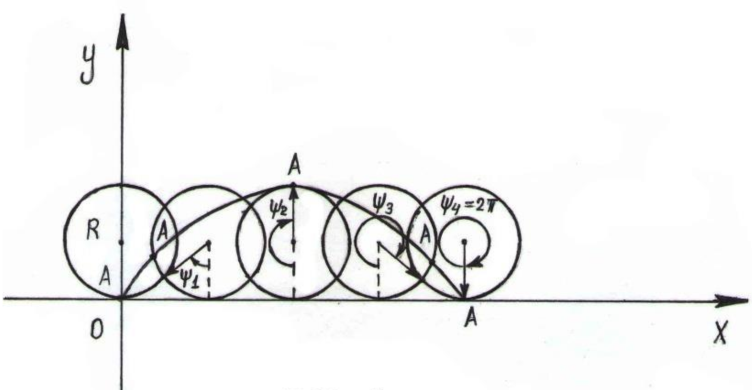
$$К = \int_0^{Т} v(t)dt = \int_0^{Т} (v_0 - \mathrm{g}\, t)dt = \left(v_0 t - \frac{\mathrm{g}t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{Т} = v_0 Т - \frac{\mathrm{g}Т^2}{2} =$$

$$= v_0 2t_к - \frac{\mathrm{g}\cdot(2\cdot t_к)^2}{2} = 2v_0\cdot\frac{v_0}{\mathrm{g}} - \frac{\mathrm{g}\cdot\left(2\cdot\frac{v_0}{\mathrm{g}}\right)^2}{2} = \frac{2{v_0}^2}{\mathrm{g}} - \frac{2{v_0}^2}{\mathrm{g}} = 0$$

таап, таш жердин бетинде которулбай (жылбай) кала берген деп жооп беребиз. ◄

2. Тегиздиктеги ийри боюнча кыймылдагы которулуу. Тегиздикте жаткан L ийрисинин A чекитинен B чекитине чейин кыймылдаган материалдык чекиттин баскан жолун узундугун, $\overset{\frown}{AB}$ жаасын узундугу менен ченөөгө болот.

Мисалы, 3) Радиусу R болгон тайгаланбоочу дөңгөлөктөн бир A чекитин фиксирлеп, анын дөңгөлөк толук бир айланып чыккан мезгилдеги баскан жолун узундугун тапкыла (12.35 – чийме).



12.35-чийме

► Айталы, A чекити убакыттын баштапкы $t = 0$ ирмеминде Oxy координаталар башталмасы менен дал келген, дөңгөлөктүн эң төмөнкү чекитинде жайгашсын. Дөңгөлөк айланып баштаганда A чекити кошо айланып, анын координаталары параметр катарында кызмат кылган ψ бурулуу бурчу менен

$$\begin{cases} x = R\psi - \mathrm{R}\sin\psi, \\ y = R - R\cos\psi, \end{cases} \quad \psi \in [0,\ 2\pi]$$ көз карандылык байланышта болсун.

Эгерде ψ параметрин жоюштура алсак, анда парметрдик теңдеме айкын көрүнүштөгү $y = y(x)$ функциясына айланат. Андай болсо, (37) боюнча $\overset{\frown}{AB}$ жаасынын узундугу

$L = \int_a^b \sqrt{1+[y']^2}\,dx$ формуласы менен эсептелет. Бул формуланын

параметрдик теңдеме менен берилген ийринин жаасын узундугун эсептөөчү (39) көрүнүшүн колдонуп, тегиздиктеги жалпак ийрини бойлоп айланып кыймылдаган А чекитин

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_\psi\right)^2 + (y'_\psi)^2}\,d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[(R\psi - \mathrm{R}\sin\psi)'_\psi\right]^2 + \left[(R - R\cos\psi)'_\psi\right]^2}\,d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{[R - \mathrm{R}\,cos\,\psi]^2 + [R\sin\psi]^2}\,d\psi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2R^2(1 - cos\,\psi)}\,d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4R^2 sin^2\frac{\psi}{2}}\,d\psi = 2R\int_0^{2\pi} \sin\frac{\psi}{2}\,d\psi = 4R\int_0^{2\pi} \sin\frac{\psi}{2}\,d\left(\frac{\psi}{2}\right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \dfrac{\psi}{2}, 2du = d\psi; \\ \psi = 0 \Leftrightarrow u = 0, \\ \psi = 2\pi \Leftrightarrow u = \pi \end{matrix} \right| = 4R\int_0^{\pi} \sin u\;du = -4R\cos u\,\Big|_0^{\pi} =$$

$= -4R(\cos\pi\ - \cos 0) = 8\mathrm{R}$ баскан жолунун узундугун табабыз.◄

12.5.3 Материалдык сызыктардын жана жалпак пластинкалардын инерция моменттери

1. Эгерде материалдык чекит айлана боюнча бир калыпта кыймылда болсо, анда анын сызыктуу v ылдамдыгы, бурчтук ω ылдамдыгы менен $v = \omega \cdot r$ тиешелештиги аркылуу байланышкан болот. Мында r айлананын радиусу.

Массалары $m_1, m_2, \dots, m_n$ болгон n сандагы материалдык чекиттер тиешелүү түрдө, ар башка $r_1,\ r_2, \dots, r_n$ радиустар менен бир гана октун айланасында айлампа кыймылда болуп, бардыгы бирдей ω бурчтук ылдамдыктарына ээ болсун. Анда алардын кинетикалык энергияларын жалпы суммасы

$$\mathrm{E} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ \ldots + \frac{m_n v_n^2}{2} = \left| \begin{matrix} v_n = \omega \cdot r_n \\ \text{эске алып} \end{matrix} \right| =$$

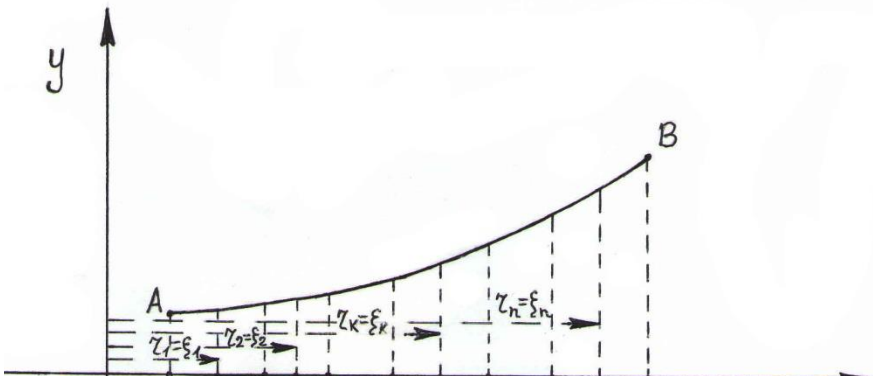
$$= \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2} + \ \ldots + \frac{m_n \omega^2 r_n^2}{2} \qquad (50)$$

көрүнүштө эсептелет. (50) формуласын материалдык чекиттердин дискреттик системасын кинетикалык энергияларынын жалпылоочу суммасын табууда колдонууга болот.

Эгерде материалдык чекиттердин системасына, алардын айлампа кыймылын мүнөздөөчү

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$$

көрүнүштөгү I чоңдугун киргизсек, анда кинетикалык энергиялардын жалпы суммасы үчүн жазылган туюнтманы $\mathrm{E} = \frac{I\,\omega^2}{2}$ көрүнүштө кыскартып жазууга болот. I чоңдугун материалдык чекиттердин системасын айлануу огуна карата *инерциясын моменти* деп айтышат.



12.36-чийме

2. Айталы, массасы М болгон бир тектүү жалпак материалдык тело, жогору жагынан $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгон $y = f(x)$ функциясын графиги менен чектелген $aABb$ ийри сызыктуу трапеция көрүнүштө болуп, Оy огун айланасында ω бурчтук ылдамдыгы менен айланып турсун (12.36 – чийме).

Телонун Оy огуна карата $I_у -$ *инерция моментин* же $E_{aABb} = I_у \cdot \frac{\omega^2}{2}$ формуласындагы $I_у -$ *пропорция коэффициентин* табалы. Мында E_{aABb} деп, $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын кинетикалык энергиясын

белгиледик. Бир тектүү телонун массасы, анын аянты боюнча бирдей жайылгандыктан, ийри сызыктуу трапециянын бардык чекиттериндеги тыгыздык, аянттын бирдигине туура келген масса катарында

$\rho = \frac{\text{M}}{S_{aABb}} = \frac{\text{M}}{\int_a^b f(x)dx}$ турактуу сан болот. Эркин тандалган x_k чекиттери ($k = 0, 1, \dots, n$) менен $[a,\ b]$ кесиндисин n майда бөлүктөргө бөлөлү. Бул бөлүктөрдүн бир тилкесин $[x_{k-1}, x_k]$ алып, анын ичиндеги чекиттердин каалаган бирин ξ_k деп тандайлы ($\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$). Ийри сызыктуу трапециянын $[x_{k-1}, x_k]$ кесиндисине туура келген тилкесинин массасы жакындаштырылган түрдө

$m_k \approx \rho \cdot S_к = \rho \cdot f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ болот. Мында $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, ал эми $S_к -$ алынган бөлүкчөнүн аянты. Тилкедеги чекиттердин тобунун сызыктуу ылдамдыгы менен бурчтук ылдамдык $v_k \approx \omega \cdot r_k$ көрүнүштө байланышарын эстеп, $[x_{k-1}, x_k]$ кесиндиси орточо $r_k \approx \xi_k$ радиусу менен Оy огун айланат деп алып, (50) формуланы колдонсок

$$E_{aABb} \approx \frac{m_1\omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2\omega^2 r_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n\omega^2 r_n^2}{2} = \frac{\rho \cdot f(\xi_1) \cdot \Delta x_1\ \omega^2 \xi_1^2}{2} + \dots$$

$$\dots + \frac{\rho \cdot f(\xi_n) \cdot \Delta x_n\ \omega^2 \xi_n^2}{2} = \frac{\rho\omega^2}{2}[\xi_1^2 \cdot f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + \xi_n^2 \cdot f(\xi_n) \cdot \Delta x_n] =$$

$$= \frac{\rho\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{n} \xi_n^2 \cdot f(\xi_n) \cdot \Delta x_n, \qquad (51)$$

бүтүндөй $aABb$ ийри сызыктуу трапециясын жакындаштырылган кинетикалык энергиясын тапкан болобуз. Жакындаштырылган дегенибиздин себеби, (50) формуласындагы дискреттик аралыкта жайкашкан конкреттүү материалдык чекиттердин системасын, бөлүкчө тилкелерде жайгашкан чекиттердин тобу менен алмаштырып жаткандыгыбызда болуп эсептелет. Эгерде бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйтсөк $n \to \infty$, анда бөлүкчө тилкелердин эни болгон

$\lambda = \underbrace{max}_{0 \le k \le n}\{\Delta x_k\} \to 0$ умтулуп, (51) теңдештигиндеги сумма, $[a,\ b]$ аралыгында аныкталган $x^2 f(x)$ функциясына интегралдык сумма болорун көрөбүз. Анда 12.2 аныктаманын негизинде, ийри сызыктуу трапеция көрүнүштөгү пластинканын кинетикалык энергиясы

$$E_{aABb}=\frac{\rho\omega^2}{2}\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_n^2\cdot f(\xi_n)\cdot\Delta x_n=\frac{\rho\omega^2}{2}\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx,\qquad \text{же}$$

$$E_{aABb}=\frac{\rho\omega^2}{2}\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx \qquad (52)$$

формуласы менен эсептелери келип чыгат. Мындан жалпак $aABb$ пластинканын Оу огуна карата $I_у$ инерция моменти

$$E_{aABb}=I_у\cdot\frac{\omega^2}{2}\Leftrightarrow\frac{\rho\omega^2}{2}\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx=I_у\cdot\frac{\omega^2}{2}\quad \text{же}$$

$$I_у=\rho\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx=\text{М}\cdot\frac{\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)dx} \qquad (53)$$

көрүнүштө аныкталат.

Мисалы, 4) $y=x^2$ функциясы жана $y=0, x=0, x=a,\ a>0$ түздөрү менен чектелген, массасы М болгон бир тектүү жалпак пластинканын Оу огуна карата инерция моментин эсептегиле.

► Изделүүчү инерциянын моментин (53) формуласы менен эсептейбиз. Адегенде $\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx=\int_0^a x^2\cdot x^2\,dx=\int_0^a x^4\,dx=\frac{x^5}{5}\Big|_0^a=\frac{a^5}{5}$,

$\int_a^b f(x)dx=\int_0^a x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^a=\frac{a^3}{3}$ интегралдарын эсептеп, (53) кө коюп $I_у=\text{М}\cdot\frac{\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)dx}=\text{М}\cdot\frac{\frac{a^5}{5}}{\frac{a^3}{3}}=\frac{3\text{М}a^2}{5}$ жообуна ээ болобуз.◄

3. Айталы, $y=f(x)$, $x\in[a,\ b]$ функциясы менен берилген ийриде, массасы М, тыгыздыгы ρ болгон бир тектүү материалдык сызык жайгашсын. Материалдык сызыктын Оy огуна карата инерция моментин табуу ыкмасын көрсөтөлү. Жогорудагыдай эле $[a,\ b]$ кесиндисин эркин ыкмада узундуктары $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ болгон n майда бөлүктөргө бөлөбүз.

Ийринин $k-$ бөлүкчө $[x_{k-1},x_k]$ кесиндисине туура келген жаасынын массасын $m_k\approx\rho\cdot\Delta x_k$, сызыктуу ылдамдыгын $v_k\approx\omega\cdot r_k$, айлануу

радиусун $r_k \approx \xi_k$ деп алып $\lambda = \underbrace{max}_{0 \le k \le n} \{\Delta x_k\} \to 0$ умтулгандагы пределге өтөлү.

Бүтүндөй ийринин кинетикалык энергиясы менен, I_y инерция моментин арасындагы байланышты пайдаланып, берилген ийринин Оу огуна карата

$$I_y = \rho \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx \qquad (54)$$

инерциясын моментин эсептөөчү формулага ээ болобуз.

Мисалы, 5) Узундугу l болгон бир тектүү ичке стерженин учуна карата инерция моментин тапкыла.

► Берилген стерженди Ox огундагы $0 \le x \le l$ кесиндиси деп ойлоп, кесиндин учуна карата стерженин инерциясын моментин табалы. Кесиндин сол учунда стерженге перпендикуляр турган Оy огунан $x = 0$ чекитин алып, стерженди сол учун же Оy огун өзүн айланган кыймылда деп эсептеп, Оy огуна карата инерция моментин табабыз. (54) формуласында $f(x) = 0$ десек (стержень Ox огунда болгондуктан),

$$I_y = \rho \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \rho \int_0^l x^2\ dx = \rho \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^l = \frac{\rho l^3}{3}$$

келип чыгат. Эгерде стерженин М массасы белгилүү болсо, анда стержень боюнча бирдей жайылган тыгыздыктын турактуу $\rho = \frac{M}{l}$ маанисин коюп, стерженин Оy огуна карата инерция моментин

$I_y = \frac{Ml^2}{3}$ көрүнүштө аныктайбыз.◄

6) Узундугу l болгон бир тектүү ичке стерженин тең ортосуна карата инерция моментин эсептегиле.

► Берилген стерженди тең ортосу О координата башталамасында болгондой Ox огуна жайгаштырсак, анда стерженди $-\frac{l}{2} \le x \le \frac{l}{2}$ аралыгында аныкталган $y = f(x) \equiv 0$ функциясы сыяктуу кароого болот. Оy огун айлануу огу катарында алабыз, анткени стерженге

перпендикуляр болуп, анын тең ортосунан өткөн кандай түз болсо да Оy огу менен дал келет. Ошентип $f'(x) = 0$ болгондуктан, Оy огуна карата стержендин инерция моментин (54) формуласы боюнча

$$I_{у} = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx = \rho \frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\rho l^3}{12}$$

көрүнүштө эсептейбиз. Бир тектүү стерженде узундук бирдигине туура келген массанын, б.а. тыгыздыктын $\rho = \frac{М}{l}$ маанисин эске алып, инерциянын моментин $I_{у} = \frac{Мl^2}{12}$ көрүнүшкө келтиребиз. Мындан Оy огуна карата стержендин тең ортосундагы инерциянын моменти, учундагы инерция моментине салыштырмалуу төрт эсе кичине болорун көрөбүз.◄

12.5.4 Бир тектүү эмес стержендин массасы жана оордук борбору

1. Айталы, тик бурчтуу Oxy координаталар системасын Ox огундагы $[a,\ b]$ кесиндисинде, сызыктуу $\rho = \rho(x)$ тыгыздыгына ээ болгон бир тектүү эмес стержень жайгашсын. $[a,\ b]$ кесиндисин

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ ... \ < x_{n-1} < x_n$ чекиттерин жардамы менен узундуктары $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ болгон n майда $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүктөргө бөлүп, алардын ар биринен бирден ξ_k чекиттерин эркин абалда тандап алалы. Сезилбеген каталык кетирүү менен $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүкчөлөрдөгү ортолонгон тыгыздыкты турактуу $\rho = \rho(\xi_k)$ деп алсак, анда стержендин бул бөлүкчөдөгү үзүндүсүн орточо массасы $m_k = \rho(\xi_к) \cdot \Delta x_k$ көрүнүштө эсептелет. Жалпы стержендин массасы жакындаштырылган сумма көрүнүшүндө

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

эсептелет. Түзүлгөн сумма $[a,\ b]$ кесиндисинде $\rho = \rho(x)$ функциясына интегралдык сумма болот. Анда бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйтсөк,

бөлүкчөлөрдүн узундуктары $\lambda = \underbrace{max}_{0\le k\le n}\{\Delta x_k\} \to 0$ умтулуп, жалпы стержендин массасы

$$m = \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b \rho(x)dx \text{ же } m = \int_a^b \rho(x)dx \qquad (55)$$

анык интегралын маанисине барабар болот.

2. Бир тектүү эмес стержендин оордук борбору

Ox огунун $x_1, x_2, \dots, x_n$ чекиттеринде жайгашып, массалары $m_1, m_2, \dots, m_n$ болгон материалдык чекиттердин системасын оордук борборунун $x_с$ координатасы

$$x_с = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_kx_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} \qquad (56)$$

формуласы менен табылары белгилүү. Бир тектүү эмес стержендин оордук борборун $x_с$ координатасын аныктоодо (56) формуласын пайдаланабыз.

$[a,\ b]$ кесиндисинде жайгашкан стержендин оордук борборун табуу үчүн, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$ чекиттерин жардамы менен, кесиндини узундуктары $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ болгон n жекече $[x_{k-1},\ x_k]$ бөлүктөргө бөлүп, ар бир жекече бөлүктөрдөгү стержендин үзүндүлөрүн m_k массаларын, (55) формуланын негизинде

$$m_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)dx,$$

көрүнүштө эсептейбиз. Орточо маани жөнүндөгү Лагранждын теоремасын колдонуп, аны

$$m_k = \rho(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) \text{ же } m_k = \rho(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

көрүнүштө жазууга да болот. Мында $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k,\ k = 0, 1, \dots, n.$

Эске албай тургандай каталык кетирүү менен, берилген бир тектүү эмес стержендин $[x_{k-1},\ x_k]$ үзүндүлөрүн m_k массаларын ξ_k чекиттеринде топтоштурулган деп ойлоп, жалпы стерженди массалары

m_k болгон ξ_k чекиттеринде жайгашкан материалдык чекиттердин системасы сыяктуу деп элестетебиз. Анда жалпы стерженди́н массасын

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)dx = \int_a^b \rho(x)dx = m$$

көрүнүштө таап, (56) формуланын негизинде, бир тектүү эмес стержендин оордук борборун координатасын

$$x_с \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{m} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \, \rho(\xi_k) \cdot \Delta x_k}{m}$$

көрүнүштө туюнтабыз. Бөлчөктүн алымында $x \cdot \rho(x)$ функциясын интегралдык суммасы тургандыктан, $\lambda = \underbrace{max}_{0 \le k \le n} \{\Delta x_k\} \to 0$ умтулгандагы пределге өтүп, бир тектүү эмес стержендин оордук борборун координатасын

$$x_с = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx} \qquad (57)$$

эсептөөчү формуланы табабыз.

Мисалы, 7) Сызыктуу тыгыздыгы $\rho = x$, узундугу $l = 1$ болгон стержендин оордук борборун координатасын тапкыла.

► (57) формуласын колдонуп, изделүүчү оордук борбордун координатасын

$$x_с = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x)dx}{\int_a^b \rho(x)dx} = \frac{\int_0^1 x \cdot x \, dx}{\int_0^1 x \, dx} = \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1}{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1} = \frac{2}{3}$$ табабыз. ◄

12.5.5 Тегиздиктеги нерселердин оордук борборлору

Тегиздиктеги Oxy координаталар системасында массалары m_k, координаталары $(x_k; y_k)$ болгон ($k = 0, 1, \dots, n$) дискреттик материалдык чекиттердин сиситемасы берилсе, анда алардын оордук борбору болгон С $(x_с; y_с)$ чекитин координаталары (56) сыяктуу

$$\begin{cases} x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{\mathrm{M}}, \\ y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{\mathrm{M}} \end{cases} \qquad (58)$$

көрүнүштөрдө эсептелет. Мында М материалдык чекиттердин системасын толук массасы. Материалдык чекиттер кыймылга келсе, анда алардын оордук борбору болгон С чекити да кошо кыймылга келет. Эгерде материалдык чекиттердин системасына сырттан таасир этүүчү күч болбосо, анда оордук борбору түз сызыктуу бир калыптагы кыймылда болот (көбүнчө тынч абалда кала берет). Механикада оордук борборун аныктоонун зарылдыгы, систематанын кыймылын сүрөттөп үйрөнүү зарылчылыгынан келип чыгат. Анткени эски координаталар системасында (58) формуласы менен аныкталган оордук борборун, тегиздикте жаңыдан түзүлгөн координаталар системасын башталышы катарында алып, ага салыштырмалуу кыймылды сүрөттөө ыңгайлуу болот.

Анык интегралдын жардамы менен материалдык сызыктардын жана жалпак фигуралардын оордук борборлорун аныктоо ыкмаларын келтирип чыгарабыз.

1. Айталы, узундугу L болгон $\breve{AB}$ материалдык ийри, $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз туундусу жашаган $y = f(x)$ функциясына график болсун дейли. $\breve{AB}$ ийриси бир тектүү, б.а. бардык чекиттерде туруктуу ρ тыгыздыгына ээ болсун. $\breve{AB}$ ийрисин узундуктары

$\Delta l_k \approx \sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\ \Delta x_k$ болгон n жаачаларга бөлүп ($L = \sum \Delta l_k$), бул жаачалардын ар биринин массасын $m_k \approx \rho \cdot \Delta l_k$ деп алууга болот. Жакындаштырылган дегенибиздин себеби, барабардыктардын оң жагында жаачалардын узундуктарын ордуна, алардын учтарын туташтырып турган сынык сызыктардын узундуктары алынгандыгында болуп эсептелет.

Бөлүкчө жаачалардын ар бирин, координаталары $(x_k; y_k)$,

$y_k = f(x_k)$ болгон материалдык чекиттер катарында кабыл алып, (58) формуладан жакындаштырылган түрдө

$$\begin{cases} x_с \approx \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{М} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \rho \cdot \Delta l_k}{М} = \dfrac{\rho}{М} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot \sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\ \Delta x_k, \\ y_с \approx \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{М} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \rho \cdot \Delta l_k}{М} = \dfrac{\rho}{М} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\ \Delta x_k \end{cases} \quad (59)$$

оордук борборун координаталарын табабыз.

Мында М массасы (саны) $М = \rho L = \rho \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$, ал эми (37) формула боюнча $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$ -ийринин жалпы узундугу.

(59) формулалардагы акыркы суммалар, тиешелүү түрдө

$x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, $f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ функцияларынын $[a,\ b]$ кесиндисиндеги интегралдык суммалары болуп эсептелишкендиктен, (59) дан $\lambda = \underbrace{max}_{0 \le k \le n} \{\Delta x_k\} \to 0$ умтулгандагы пределге өтөбүз

$$x_с = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx}, \qquad y_с = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx}. \quad (60)$$

Анда $\breve{АВ}$ ийрисин оордук борборун координаталарын эсептөөчү (60) эрежелер келип чыгышат. Эскерте кетүүчү нерсе, (60) формулаларын экинчисинен $y_с \cdot \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$ же

$y_с \cdot L = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$ таап, эки жагын тең 2π ге көбөйтүп

$2\pi y_с \cdot L = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\ dx$ теңдештигин алууга болот. Теңдештиктин оң жагында $\breve{АВ}$ ийрисин Ox огун айланасында айлантуудан келип беттин аянтын (45) формуласы турганын көрөбүз. Мындан ийри менен бир тегиздикте жатып, аны менен кесилишпеген октун айланасында айлануудан келип чыккан беттин S аянты, ийринин оордук $(x_с;\ y_с)$ борборун айлануу жолун узундугу менен $\breve{АВ}$ ийрисин L узундугун

$$S = 2\pi y_с \cdot L \qquad (61)$$

көбөйтүндүсүнө тең болору келип чыгат. Бул ырастоо *Гульдендин биринчи теоремасы* деген атты алган.

Мисалдар. 8) $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $-R\le x\le R$ жарым айланасынын массасын оордук борборун координаталарын тапкыла.

► Функциянын туундусун

$y'=\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ эсептеп, $\sqrt{1+[y']^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$ туюнтулушун келтирип чыгарабыз. Айлананын узундугу $2\pi R$, ал эми анын жарымын узундугу

$L=\pi R=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+[y']^2}\ dx$ ге барабар. Бул маанилерди (60) формуласына коюп,

$$x_c=\frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R}x\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\ \ dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{d\ (R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{1}{\pi}\sqrt{R^2-x^2}\Big|_{-R}^{R}=0,$$

$$y_c=\frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\ \ dx=\frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R}R\ dx=\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}dx=\frac{2R}{\pi}$$

табабыз. Демек, оордук борбору деп координаталары $\left(0;\ \frac{2R}{\pi}\right)$ болгон чекит алынат.◄

9) $x^2+y^2=R^2-$ айланасын координаттык тегиздиктин биринчи чейректеги жаасын массасынын оордук борборун аныктагыла.

► Берилген фигура биринчи координаттык чейректин бисектриса бурчуна карата симметриялуу жайгашкандыктан, анын массасын оордук борборунун абциссасы менен ординатасы барабар болушат. Ошондуктан оордук борборун ординатасын табуу үчүн, Гульдендин биринчи теоремасын пайдаланабыз. Ошентип айлананын биринчи чейрегин Ox огун тегерегинде айланткан кезде, сферанын жарымы пайда болуп, анын аянты $2\pi R^2$ санына барабар болот. Айлананын төрттөн бир бөлүгүн узундугу $\frac{2\pi R}{4}=\frac{\pi R}{2}$ болгондуктан, Гульдендин биринчи теоремасын ырастоосу боюнча $2\pi R^2=2\pi y_c\cdot\frac{\pi R}{2}$ же болбосо оордук борборун ординатасы $y_c=\frac{2R}{\pi}$ табылып, абциссасы да $x_c=\frac{2R}{\pi}$

болот. Анда $C\left(\frac{2R}{\pi};\ \frac{2R}{\pi}\right)$ чекити берилген жарым айланага оордук борбор болорун көрөбүз.◄

2. Жалпак фигуралардын оордук борборун аныктоо. Айталы, бир тектүү материалдык пластинка $[a,\ b]$ кесиндисинде оң болгон $y = f(x),\ x \in [a,\ b]$ функциясын графиги жана $x = a,\ x = b,\ Ox$ түздөрү менен чектелген ийри сызыктуу трапеция формасында болсун. Пластинканын жалпы массасы М болуп, масса пластинканын бардык чекиттерине бир калыпта жайылган деп эсептейли (б.а. $\rho -$турактуу). Мындай фигуранын оордук борборун координаталарын аныктоо үчүн, аны Оу огуна параллель болгон $y = x_k$ түздөрү менен n майда тилкече бөлүктөргө бөлөбүз. Бөлүүдөгү $[x_{k-1},\ x_k]$ кесиндисинен ξ_k чекитин тандап, каралган $k-$ тилкечени негизи $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, бийиктиги $f\left(\xi_k\right)$ болгон төрт бурчтук менен алмаштырып, жакындаштырылган аянтын $f\left(\xi_k\right)\cdot\Delta x_k$ десек, анда мындай тилкеченин массасы $m_k \approx \rho\cdot f\left(\xi_k\right)\cdot\Delta x_k$ көрүнүштө эсептесе болот $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$. Ар бир тилкечени координаталары $\left(\xi_k;\ \frac{1}{2}f\left(\xi_k\right)\right)$ болгон материалдык чекиттердин системасы катарында кабыл алып, (58) формуланын негизинде пластинканын оордук борборун координаталарын

$$x_c \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\xi_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\xi_k}{\mathrm{M}} = \frac{\rho}{\mathrm{M}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cdot f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\,,$$
$$y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\ \frac{1}{2}f(\xi_k)}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\ \frac{1}{2}f(\xi_k)}{\mathrm{M}} = \frac{\rho}{\mathrm{M}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot f^2(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (61)$$

жакындаштырып таба алабыз. (61) формулаларда акыркы суммалар тиешелүү түрдө, $x\,f(x)$ менен $\frac{1}{2}f^2(x)$ функцияларына интегралдык суммалар болгондуктан, бөлүүлөрдүн санын чексиз көбөйтүп $\lambda = \underbrace{max}_{0\le k\le n}\{\Delta x_k\} \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк, жалпак пластинканын оордук борборун координаталарын табуучу

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\,, \quad y_c = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \qquad (62)$$

формулалар келип чыгат. Мында

$$M = \rho \cdot S_{aABb} = \rho \cdot \int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

пластинканын жалпы массасы.

(62) формуланын экинчисин $2\, y_c \cdot \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx$ көрүнүштө жазып, эки жагын тең π ге көбөйтүп, жогорудагы $(*)$ байланышын эстесек

$2\pi y_c \cdot S_{aABb} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ келип чыгып, (44)формуласы боюнча,

анын оң жагында айлануудан пайда болгон телонун көлөмүн формуласы тургандыгын байкайбыз. Ошентип, ийри сызыктуу трапецияны абцисса огун айланасында айлантуудан пайда болгон телонун көлөмү, ийри сызыктуу трапециянын оордук борборун айлануу жолу менен түзүлгөн айлананын узундугун, трапециянын S_{aABb} аянтына көбөйтүп койгонго $V = 2\pi y_c \cdot S_{aABb}$ барабар. Бул ырастоо *Гульдендин экинчи теоремасы* деген атты алган.

Мисалы, 10) $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$ жарым тегерегин оордук борборун тапкыла.

► Гульдендин экинчи теоремасын ырастоосун пайдаланып көрөлү. Ал үчүн шардын көлөмүн $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, жарым тегеректин аянтын $S = \frac{\pi R^2}{2}$ таап

$y_c = \frac{V}{2\pi \cdot S_{aABb}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3}$ оордук борборун ординатасын

аныктайбыз. Берилген фигура ордината огуна карата симметриялуу жайгашкандыктан $x_c = 0$ деп алып, оордук борбордун $\left(0; \frac{4R}{3}\right)$ координаталуу чекит экендигин көрөбүз.◄

Көнүгүүлөр

1. Берилген кесиндилерди n майда бөлүктөргө бөлүү менен $f(x)$ функцияларынын эң жогорку жана эң төмөнкү интегралдык суммаларын түзгүлө:

а) $f(x) = x^2$ функциясына $-2 \leq x \leq 3$ кесиндисинде;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ функциясына $0 \leq x \leq 1$ кесиндисинде;

в) $f(x) = 2^x$ функциясына $0 \leq x \leq 10$ кесиндисинде.

2. Кесиндилерди майда бөлүктөргө бөлүү менен түзүлгөн интегралдык суммалардын предели катарында, төмөндөгү анык интегралдарды эсептегиле:

$$\text{а) } \int_{-1}^{2} x^2\,dx\,; \quad \text{б) } \int_{0}^{1} a^x\,dx; \quad \text{в) } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx; \quad \text{г) } \int_{0}^{\pi} \cos t\,dt;$$

3. Ньютон – Лейбництин формуласын пайдаланып, төмөндөгү анык интегралдарды эсептегиле:

$$\text{а) } \int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\ dx; \quad \text{б) } \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx\,; \quad \text{в) } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}\,; \quad \text{г) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$\text{д) } \int_{sh\,1}^{sh\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\,; \quad \text{е) } \int_{0}^{\pi} |1-x|\,dx; \quad \text{ж) } \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\,, \quad 0 < \alpha < \pi\,;$$

$$\text{з) } \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}\,, \quad 0 \leq \varepsilon < 1\,;$$

4. Анык интегралдын аныктоосун пайдаланып, төмөндөгү пределдерди эсептегиле:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ \dots + \frac{n-1}{n^2}\right)\,; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \ \dots + \frac{n-1}{n+n}\right)\,;$$

$$\text{в) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ \dots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)\,;$$

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^{\mathrm{p}}+2^{\mathrm{p}}+\ \dots+n^{\mathrm{p}}}{n^{\mathrm{p}+1}}\right)$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ \dots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$;

5. Бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонуп эсептегиле.

а) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$; г) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\,dx$;

д) $\int\limits_0^{1} arccos\,x\ \ dx$; е) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,arctg\,x\,dx$;

6. Керектүү ордуна коюуларды жүргүзүү менен, төмөндөгү анык интегралдарды эсептегиле:

а) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$; в) $\int\limits_0^{0{,}75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;

г) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$; д) $\int\limits_0^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}\ \,dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

7. Төмөндөгү интегралдарды эсептегиле:

а) $\int\limits_0^{1} x\,(2-x^2)^{12}\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$; в) $\int\limits_0^{\mathrm{e}}(x\ \ln x)^2\ \,dx$;

г) $\int\limits_1^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,dx$; д) $\int\limits_{-2}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; е) $\int\limits_0^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$; ж) $\int\limits_0^{\pi} arc\sin\sqrt{\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{x}}}\,dx$;

з) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$; и) $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{sin^4x+cos^4x}$; к) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$;

л) $\int_{0}^{\pi}(x\sin x)^2\,dx$; м) $\int_{0}^{\pi} e^x cos^2x\,dx$.

8. Көрсөтүлгөн аралыктарда, төмөндөгү функциялардын орточо маанилерин аныктагыла:

а) $[0,1]$ аралыгында $f(x)=x^2$ функциясын;

б) $[0,100]$ аралыгында $f(x)=\sqrt{x}$ функциясын;

в) $[0,2\pi]$ аралыгында $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ функциясын;

г) $[0,2\pi]$ аралыгында $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ функциясын .

9. Орточо маани жөнүндөгү биринчи теорема боюнча төмөндөгү интегралдарды баалагыла:

а) $\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$; б) $\int_{0}^{1}\frac{x^9dx}{\sqrt{1+x}}$; в) $\int_{0}^{100}\frac{e^{-x}dx}{x+100}$.

10. Тик бурчтуу координаталар системасында берилген ийрилер менен чектелген аянттарды тапкыла:

а) $ax=y^2,\ ay=x^2$; б) $y=x^2$; в) $y=2x-x^2,\ x+y=0$;

г) $y=|\lg x|,\ y=0,\ x=0{,}1,\ x=10$; д) $y=2^x,\ y=2,\ x=0$;

е) $y=(x+1)^2$, $x=\sin\pi y$, $y=0\ (0\le y\le 1)$;

ж) $y=x,\ y=sin^2x\ \ (0\le x\le\pi)$; з) $y=\frac{a^2}{a^2+x^2}$, $y=0$;

11. Параметрдик теңдемелери менен берилген ийрилер аркылуу чектелген аянттарды эсептегиле:

а) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le\pi$ жана $y=0$ (циклоида);

б) $x=2t-t^2,\ y=2t^2-t^3$;

в) $x=(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t), 0\le t\le 2\pi$ жана

$x=a,\ y\le 0$ түздөрү менен чектелген;

г) $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t)$;

12. Полярдык координаталарда берилген фигуралардын аянтын тапкыла:

а) $r = \frac{P}{1-\cos\varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{2}$;

б) $r = \frac{P}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ (эллипс).

в) $r = 3 + 2\cos\varphi$; г) $r = \frac{1}{\varphi}, r = \frac{1}{\sin\varphi}$ $\left(0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$;

д) $r = a\cos\varphi$, $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $M\left(\frac{a}{2}; 0\right) \in S$;

е) $\varphi = r\, arctg\, r$ ийриси жана $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ шоолалары менен чектелген сектордун аянтын тапкыла.

13. Берилген ийрилердин узундуктарын эсептегиле:

а) $y = x^{\frac{3}{2}}$ $(0 \leq x \leq 4)$; б) $y^2 = 2px$ $(0 \leq x \leq x_0)$;

в) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ $(0 \leq x \leq e)$; г) $r = a\, sin^2\frac{\varphi}{3}$;

14. Төмөндөгү беттер менен чектелген фигуралардын көлөмдөрүн эсептегиле:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (эллипсоид);

в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm$c ; г) $x^2 + z^2 = a^2$, $z^2 + y^2 = a^2$;

д) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$; е) $z^2 = b(a - x)$, $x^2 + y^2 = ax$;

ж) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < z < a$; з) $x + y + z^2 = 1$, $x = 0$, $e = 0$, $z = 0$.

15. Айлануудан пайда болгон фигуралардын көлөмдөрүн эсептегиле:

а) $y = 2x - x^2$, $y = 0$ графиктери менен чектелген фигураны

1) $0x$ огун айланасында;

2) Oy огун айланасында.

б) $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$ графикткри менен чектелген фигураны

1) $0x$ огун айланасында;

2) Oy огун айланасында.

16. Төмөндөгү ийрилерди айлантуудан келип чыккан беттердин аянттарын эсептегиле:

а) $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$, $0 \le x \le \pi$ Оx огун айланасында ;

б) $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}$, $|x| \le b$ $0x$ огун айланасында ;

в) $y = tg\ x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ $0x$ огун айланасында .

г) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$:

1) полярдык октун айланасында ;

2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ шооласын айланасында;

3) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ шооласын айланасында.

17. Тик бурчтуктар формуласын пайдаланып $\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx$ интегралын жакындаштырып эсептегиле ($n = 12$ бөлүккө бөлүү менен).

18. Трапециялар формуласы менен

а) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n = 8)$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ $(n = 12)$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} sin^2 x dx}$ $(n = 6)$.

интегралдарын жакындаштырып эсептегиле.

19. Симпсондун формуласы менен төмөндөгү интегралдарды эсептегиле:

а) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ $(n = 4)$; б) $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + cosx}\, dx$ $(n = 6)$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ $(n = 10)$; г) $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\ln(1+x)}$ $(n = 6)$.

Жооптор: 1. а) $s_n = 16\frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$, $S_n = 16\frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}$;

$$б) s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}\,,\ s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\,;\ \text{в) } s_n = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}, S_n = \frac{10230\cdot 2^n}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}.$$

2. а) 1 ; б) $\frac{a-1}{\ln a}$; в) 1 ; г) $\sin x$. 3. а) $11\frac{1}{4}$; б) 2 ; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{3}$; д) 1 ;

е) 1 ; ж) $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$; з) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

4. а) $\frac{1}{2}$; б) $\ln 2$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{1}{p+1}$; д) $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$.

5. а) $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$; б) π ; в) 4π ; г) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$; д) 1 ; е) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{\pi a^4}{16}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$; г) $2 - \frac{\pi}{2}$; д) $\frac{\pi^2}{4}$.

7. а) $315\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; в) $\frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$; г) $-66\frac{6}{7}$; д) $-\frac{\pi}{3}$; е) $\frac{29}{270}$;

ж) $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$; з) $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$; и) $2\pi\sqrt{2}$; к) $\frac{1}{6}$; л) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4}$; м) $\frac{3}{5}(e^{\pi} - 1)$.

8. а) $\frac{1}{3}$; б) $6\frac{2}{3}$; в) 10 ; г) $\frac{1}{2}\cos\varphi$.

9. а) $\frac{8\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\theta$, $|\theta| < 1$; б) $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ менен $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ нин арасында кармалат;

в) $0{,}01 - 0{,}005\theta$, $|\theta| < 1$.

10. а) $\frac{a^2}{3}$; б) $4\frac{1}{2}$; в) $4\frac{1}{2}$; г) $9{,}9 - 8{,}1\lg e \approx 6{,}38$; д) $2 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0{,}56$;

е) $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \approx 0{,}97$; ж) $\frac{\pi}{2}$; з) πa^2 .

11. а) $3\pi a^2$; б) $\frac{8}{15}$; в) $\frac{a^2}{3}(4\pi^3 + 3\pi)$; г) $6\pi a^2$.

12. а) $\frac{p^2}{6}\left(3 + 4\sqrt{2}\right)$; б) $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$; в) 11π ; г) $\frac{1}{\pi}$; д) $(\pi - 1)\frac{a^2}{4}$;

е) $\frac{1}{2}\left(1 - \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. 13. а) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$;

б) $2\left(\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right)$; в) $\frac{e^2+1}{4}$; г) $\frac{3\pi a}{2}$.

14. а) $\frac{2abc}{3}$; б) $\frac{4\pi abc}{3}$; в) $\frac{8\pi abc}{3}$; г) $\frac{16}{3}a^3$; д) $\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$;

е) $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$; ж) $\frac{\pi a^3}{2}$; з) $\frac{4}{15}$.

15. а) : 1) $\frac{16\pi}{15}$; 2) $\frac{8\pi}{3}$; б) : 1) $\frac{\pi^2}{2}$; 2) $2\pi^2$.

16. а) $\frac{4\pi a^2}{432}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$; б) $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$,

мында $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ – эллипстин эксцентриситети;

в) $\pi\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$; г): 1) $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$; 2) $2\pi a^2\sqrt{2}$;

3) $2\pi a^2$. 17. – 6,2832 . 18. а) 0,69315 ; б) 0,83566 ; в) 1,4675 .

19. а) 17,333 ; б) 5,4024 ; в)1,37039 ; г) 0,2288 .

XIII ГЛАВА. ӨЗДҮК ЭМЕС ИНТЕГРАЛДАР

§ 13.1 Пределдери чексиз болгон интегралдар

13.1.1 Чектелбеген аралыктар боюнча интеграл алуу

Функциядан анык интеграл алуу амалы, кайсы бир чектүү $[a,\ b]$ кесиндисинде аныкталган жана үзгүлтүксүз болгон функциялар менен гана жүргүзүлгөндүктөн, интегралдоо аралыгы дайыма чектелген деп эсептелет. Бирок гравитациялык, электростатикалык күчтөрдүн потенциалдарын эсептөө сыяктуу практикалык маселелерди чечүүдө, көбүнчө $[a,\ +\infty)-$ *жарым сегменти,* $(-\infty,\ b]-$ *жарым интервалы,*

$(-\infty,\ +\infty)-$ интервалы сыяктуу чектелбеген аралыктар боюнча анык интегралдарды эсептөөгө туура келет. Ошентип чектелбеген аралыктар боюнча анык интеграл алуу түшүнүгүн киргизүү үчүн,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

символдору менен белгиленген жаңы I $-$роддогу (түрдөгү) өздүк эмес интегралдар түшүнүгүн киргизебиз. Оболу $[a,\ +\infty)$ $-$жарым сегменти боюнча алынган I $-$роддогу (түрдөгү) өздүк эмес интегралга токтололу.

Айталы аргументтердин бардык $x \geq a$ манилеринде аныкталган $f(x)$ функциясы, ар бир чектелген $a \leq x \leq b$ аралыгында үзгүлтүксүз, б.а. интегралдануучу болсун. Мында a $-$чекитин (санын) фиксирленген (кыймылы токтотулган), b $-$чекитин (санын) эркин алынган ($\forall b \geq a$) деп эсептейбиз. Жогорку b пределин кыймылдуу өзгөрүлмө деп эсептеп (12.2.2 – ни кара), мааниси b дан функция болгон

$$J(b) = \int_a^b f(x)dx$$ жардамчы интегралын киргизебиз.

13.1. Аныктама. *Чектелбеген* $[a, +\infty)$ *аралыгы боюнча* $f(x)$ *функциясынан алынган* I $-$ *роддогу өздүк эмес интеграл деп,*

$J(b) = \int_a^b f(x)dx$ *жардамчы интегралын* $b \to \infty$ *умтулгандагы*

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx = A \qquad (2)$$

пределин маанисин айтабыз. Эгерде пределдин мааниси A чектүү сан болсо, анда $\mathrm{I}-$ *роддогу өздүк эмес интеграл жыйналуучу, ал эми* $A = \pm\infty$ *чектелбеген сан болсо же такыр жашабаса, анда таралуучу деп аталып, өздүк эмес интегралдын чектүү сандык мааниси табылбайт.*

Мисалдар: 1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функциясы ар кандай эле чектелген $[0,\ b]$ аралыгында интегралдануучу ($b > 0$), б.а.

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x|_0^b = arctg\, b$$ маанисине ээ болот.

Ошондой эле, предели чектүү

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctg\, b = \frac{\pi}{2}$$ болгондуктан,

$[0, +\infty)$ аралыгында $\mathrm{I}-$ роддогу $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ өздүк эмес интегралы

жыйналуучу болот.

2) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ өздүк эмес интегралы λ санын кандай маанилеринде жыйналуучу болорун көрсөткүлө ($a > 0$ болгон чектүү сан).

► Эгерде $\lambda \neq 1$ болсо, анда

$$\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\cdot x^{1-\lambda}\Big|_a^b = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\left(b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right)$$

көрүнүштө эсептелип, $b \to \infty$ умтулгандагы предели

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right)$$

λ санын тандалышына жараша төмөндөгүдөй маанилерге ээ болорун көрөбүз:

а) $\lambda > 1$ болсо $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right) = -a^{1-\lambda}$ келип чыгып,

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}$$ чектелген маанисине ээ болот же жыйналуучу;

б) $\lambda < 1$ болсо

$$\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = +\infty \;- \text{таралуучу;}$$

в) $\lambda = 1$ болсо

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x|_a^b = \ln b - \ln a \text{ келип чыгып,}$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln a) = +\infty \text{ таралуучу.}$$

Ошентип,

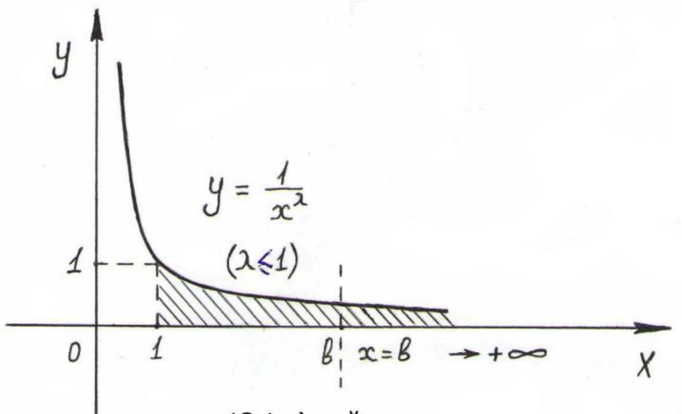
$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} +\infty & \text{таралуучу, эгерде } \lambda \le 1 \text{ болсо,} \\ \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{жыйналуучу, эгерде } \lambda > 1 \; болсо \end{cases}$$

деген пикирге келебиз. Геометриялык жактан: бул өздүк эмес интеграл

сол жагынан $x = a$ түзү, жогору жагынан $y = \frac{1}{x^\lambda}$ ийриси, төмөн жагынан Ox огу менен чектелип, оң жагы болсо чексизге чейин которулуп кыймылдап жүрүүчү $x = b$ түзүнө чейин уланган, чектелбеген жалпак фигуранын (областын) аянты катары түшүндүрүлөт. $\lambda > 1$ болгондо $y = \frac{1}{x^\lambda}$ ийриси Ox огун жандап жүрүп ага жетип, жалпак область чектелген абалга келет (13.1 б– чийме). Ошондуктан анын аянты чектүү сан болуп, өздүк эмес интеграл жыйналуучу болот. Ал эми $\lambda \le 1$ болгондо $y = \frac{1}{x^\lambda}$ ийриси, $x = b \to +\infty$

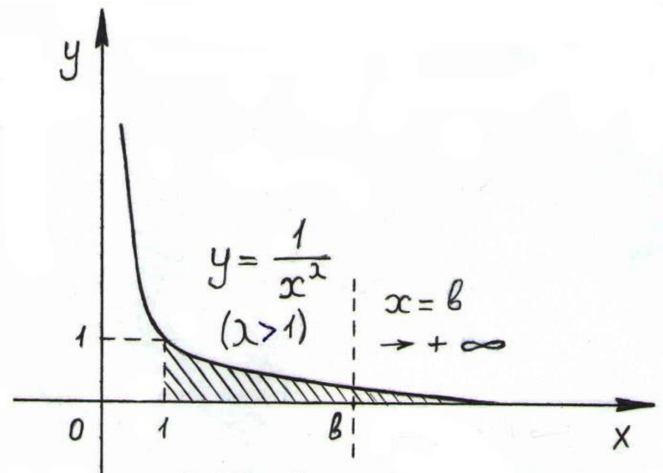
умтулуу жолунда Ox огуна жакындаганы менен ага жетпей кала берип, жалпак область (13.1 а– чийме) оң жагынан чектелбегендиктен аянты чексиз болуп, өздүк эмес интеграл таралуучу болот.◄

3) Айталы, заряддары бирдей белгидеги q_1 *жана* q_2 чекиттери абасыз вакуумда жайгашышсын. Бир аттуу заряддар түртүшкөндүктөн, алардын өз ара электростатикалык аракеттенүү күчү, Кулондун закону боюнча



13.1 а)-чийме

$F = \frac{k\, q_1\, q_2}{r^2}$ формуласы боюнча эсептелери белгилүү. Мында $r -$ саны q_1, q_2 заряддарын арасындагы аралык, $k -$туруктуу чоңдук.



13.1 б)-чийме

Эсептөө башталмасы катары тандалган M_0 чекитинде q_1 заряды жайгашсын деп алып, M_0 чекитинен r_1 аралыгында жайгашкан M чекитинде турган q_2 зарядын чексизге чейин түртүп которууга жумшалган F күчүнүн A жумушун тапкыла.

► Изделүүчү A жумушун $r \in [r_1, +\infty)$ аралыгында берилген

$F(r) = \frac{k\, q_1\, q_2}{r^2}$ функциясынан алынган өздүк эмес интеграл катарында эсептейбиз (12.5.1 – ни кара)

$$\text{A} = \int_{r_1}^{+\infty} \frac{k\, q_1\, q_2}{r^2} dr = k\, q_1\, q_2 \int_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2}\ .$$

Өздүк эмес интегралды эсептөө эрежеси боюнча

$$\int\limits_{r_1}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{r_1}^{b} \frac{dr}{r^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{r_1}$$

келип чыгып, изделүүчү жумуш $A = \frac{k\, q_1\, q_2}{r_1}$ санына барабар болот.◄

3) $\int_0^{+\infty} cos\, x\, dx$ өздүк эмес интегралын жыйналуучулугун изилдегиле.

► $\int_0^{b} cos\, x\, dx = \sin x|_0^b = \sin b - \sin 0 = \sin b$ көрүнүштө эсептелип, берилген өздүк эмес интегралдын сандык мааниси болгон

$\int_0^{+\infty} cos\, x\, dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b = B-$ саны, $-1 \leq B \leq 1$ аралыгындагы каалагандай маанилерди ала бергендиктен, бир маанилүү предели жашабайт же берилген өздүк эмес интеграл таралуучу болот.◄

Өздүк эмес интегралды эсептөөнүн (2) эрежеси, пределдин жана интегралдоо эрежелеринен келип чыккандыктан, аны эсептөөдө төмөндөгүдөй касиеттердин аткарылышына ишенебиз:

1. Эгерде $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралы жыйналуучу болсо, анда $\forall\lambda \in R$ чектүү саны үчүн $\lambda \cdot \int_a^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралы да жыйналуучу болуп,

$$\int_a^{+\infty} \lambda\, f(x)dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (3)$$

теңдештиги аткарылат.

2. Эгерде $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ жана $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ өздүк эмес интегралдары жыналуучу болсо, анда $\int_a^{+\infty} [\, f(x) + \varphi(x)]dx$ өздүк эмес интегралы да жыйналуучу болуп,

$$\int_a^{+\infty} [\, f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \qquad (4)$$

теңдештиги орун алат.

3. Эгерде $u(x)$ *жана* $v(x)$ функциялары $x \geq a$ жарым түзүндө үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү болсо, анда өздүк эмес интегралды эсептөөдө бөлүктөп интегралдоо ыкмасын колдонууга болот

$$\int_{a}^{+\infty} u(x)\,dv(x) = [u(x)\cdot v(x)]|_{a}^{+\infty} - \int_{a}^{+\infty} v(x)\,du(x). \qquad (5)$$

Мисал. 4) $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x, \; du = dx \\ dv = \mathrm{e}^{-x}\,dx, \; v = -\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} =$

$= \frac{x}{\mathrm{e}^x}[-x\cdot\,\mathrm{e}^{-x}]\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,dx = [-x\cdot\,\mathrm{e}^{-x}]|_0^{+\infty} + [\,\mathrm{e}^{-x}]|_0^{+\infty} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{\mathrm{e}^x} + 0\cdot\,\mathrm{e}^{-0} + \frac{1}{\mathrm{e}^x} - \,\mathrm{e}^{-0}\right) = -1.$$

Эгерде $u(x),\ v(x)$ функциялары $n-$ тартипке чейинки туундулары жашаса, анда бөлүктөп интегралдоо ыкмасын n жолу кайталап колдоно алабыз. Мисалы

5) $J_n = \int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = -[x^n\,\mathrm{e}^{-x}]|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \mathrm{n}\,J_{n-1},$

$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$. Мындан $n = 0$ болгондо $J_0 = 1$ болгонун эске алып, $J_n = n!$ болорун көрөбүз.

13.1.2 Оң белгидеги функциялардан алынган I −түрдөгү (роддогу) өздүк эмес интегралдарды баалоо

Көпчүлүк практикалык маселелерди чечүүдө өздүк эмес интегралдын сандык маанисин табуу негизги орунда турбастан, анын жыйналуучу же таралуучу болуусун көрсөтүү башкы орунда болушат. Анткени айрым катарлар же чексиз суммалар менен моделдештирилген процесстердин жүрүү ыргагы эмес, анын бүтөр жыйынтыгы ошол кубулуштардын тбыятын жана таасирин алдын ала болжолдоп таанууга мүмкүнчүлүк түзөт. Ошондуктан, өздүк эмес интегралдын жыйналуучулугун далилдөөдө, салыштыруу ыкмалары кеңири колдонулат.

13.1 I – **салыштыруу** т**еоремасы.** *Айталы, каалагандай* $b > a$ *сандарына карата түзүлгөн* $[a,\ b]$ *кесиндисинде,* $f(x)$ *жана* $\varphi(x)$ *функциялары интегралдануучу болушуп,* $\forall x \geq a$ *үчүн*

$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ *барбарсыздыктары аткарылсын. Анда*

1) Эгерде $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *жыйналуучу болсо, анда* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *да жыйналуучу болот.*

2) Эгерде $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *таралуучу болсо, анда* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *да таралуучу болот.*

► 1) $f(x)$ оң функция болгондуктан $\forall x > a$ үчүн, b чоңойгон сайын интегралдык сумма чоңоюп олтурат, же андан чоң $b < b_1$ маанилеринде $J(b) \leq J(b_1)$ шарты аткарылып, $J(b)$ жогорку пределге карата кемибөөчү функция болот, б.а. b нын өсүшү менен ийри сызыктуу трапециянын аянты чоңоёт

$$J(b_1) = \int_a^{b_1} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{b_1} f(x)dx \geq J(b) = \int_a^{b} f(x)dx.$$

Теореманын шарты боюнча $\forall x \geq a$ үчүн $f(x) \leq \varphi(x)$ шарты аткарылгандыктан, $b > a$ болгондо

$\int_a^{b} f(x)dx \leq \int_a^{b} \varphi(x)dx$ барабарсыздыгы орун алат. Экинчи жактан,

$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ өздүк эмес интегралы жыйналуучу болгондуктан, $\int_a^{b} \varphi(x)dx$ интегралы андан ашып кете албайт:

$\int_a^{b} \varphi(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx.$ Ошондуктан $b > a$ болгондо,

$J(b) = \int_a^{b} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx = L < +\infty$ чектелген болот.

Демек, $J(b) = \int_a^{b} f(x)dx$ функциясын $b \to \infty$ умтулганда кемибөөчү жана жогору жагынан чектелген функция деп эсептөөгө болот. Андай болсо жогору жагынан чектелген, монтондуу өсүүчү, оң $J(b)$ функциясынын предели катарында (2 – бөлүк, 7.1.3, 5^0 $-$кара)

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} J(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \le L < +\infty$$

чектүү предели жашайт, б.а. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралы жыйналуучу болуп, теореманын 1 – кортундусу далилденет.

2) Айталы тескерисинче, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралы таралуучу болсо деле, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ өздүк эмес интегралы жыйналуучу боло берсин деп жаңылыш ойлойлу. Анда далилденген 1 – бөлүккө ишенсек, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ өздүк эмес интегралын жыйналуучулугунан $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралын да жыйналуучулугу келип чыгышы керек. Бул теореманын 2 – бөлүгүнүн шартына карама – каршы келип, жаңылыш ойлогонубуздун туура эместигин же теореманын 2 – кортундусун да туура экендигин далилдейт.◄

Мисалы 6) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+sin^4x}dx$ өздүк эмес интегралын жыйналуучулугун далилдейли.

► Өздүк эмес интегралды эсептөөнүн (2) эрежеси менен жыйналуучулугун изилдөө кыйынчылык туудургандыктан, I – салыштыруу теоремасын колдонуп көрөбүз. Интеграл алдындагы

$f(x) = \frac{e^{-x^2},}{1+x^2+sin^4x}$ функция, бардык $x \ge 0$ маанилеринде оң жана

$0 < \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+sin^4x} \le \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ барабарсыздыктарын канааттандырат. Ал эми $\int_0^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ жыйналуучу болгондуктан, I – салыштыруу теоремасын негизинде $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+x^2+sin^4x}dx$ жыйналуучу өздүк эмес интеграл болот.◄

13.2 II – салыштыруу теоремасы. *Айталы, бардык* $x \ge a$ *маанилеринде* $f(x)$ *жана* $\varphi(x)$ *функциялары оң жана үзгүлтүксүз функциялар болушуп, жетишерлик чоң* x *тер үчүн* $\varphi(x) \ne 0$ *шарты аткарылсын дейли. Ушул шарттарга кошумча*

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$ *чектүү предели жашаса,*

анда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *жана* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *өздүк эмес интегралдарын экөөсү тең бир мезгилде жыйналуучу же таралуучу болушат.*

► $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k > 0$ чектүү предели жашасын дейли, анда функциянын пределин аныктамасы боюнча (7.1.1 темасындагы 7.7 – эрежесин кара) кандай гана $\varepsilon > 0$ санын алсак да, ага ылайыкталган жетишерлик чоң Δ саны табылып, бардык $x \geq \Delta$ манилери үчүн $\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - k\right| < \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алат. $\varepsilon = \frac{k}{2}$ деп тандасак, анда

$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - k\right| < \frac{k}{2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{k}{2} < \frac{f(x)}{\varphi(x)} - k < \frac{k}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{k}{2} < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \frac{3k}{2}$ келип чыгат.

$\varphi(x) > 0$ нөлдөн айырмалуу оң функция болгондуктан, акыркы барабарсыздыкты $\varphi(x)$ ке көбөйтүп жиберип, $\forall x \geq \Delta$ маанилеринде

$\frac{k}{2}\varphi(x) \; < f(x) < \frac{3k}{2}\varphi(x)$ кош барабарсыздыгы аткарыларын көрөбүз.

$f(x) < \frac{3k}{2}\varphi(x)$ барабарсыздыгына таянып, I – салыштыруу теоремасын негизинде $\int_\Delta^{+\infty} \varphi(x)dx$ өздүк эмес интегралы жыйналуучу болсо, анда $\int_\Delta^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралы да жыйналат деген тыянакка келебиз. Ошондой эле кош барабарсыздыктын биринчи бөлүгү боюнча $\frac{k}{2}\varphi(x) \; < f(x)$ аткарылгандыктан, $\int_\Delta^{+\infty} \varphi(x)dx$ өздүк эмес интегралы таралуучу болсо, $\int_\Delta^{+\infty} f(x)dx$ өздүк эмес интегралын да таралуучу экендиги келип чыгат.

Ушундай эле талкуулоо менен $\int_\Delta^{+\infty} f(x)dx$ жыйналуучу (таралуучу) болсо, $\int_\Delta^{+\infty} \varphi(x)dx$ тин да жыйналуучу (таралуучу) экендигин далилдей алабыз. ◄

Мисалы: 7) $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}dx$ өздүк эмес интегралын жыйналуучулугун изилдегиле.

► $x \geq 1$ жарым түзүндө интеграл алдындагы $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4} > 0$ функциясы оң болорун байкайбыз. Анын алымын жана бөлүмүн x^2 ка бөлүп жиберип, $f(x) = \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{x + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}$ көрүнүшкө келтирели. Мында жетишерлик чоң x тин маанилеринде $\frac{1}{x^2}, \frac{3}{x}, \frac{4}{x^2} \to 0$ чексиз кичине чоңдук катарында эсептелгендиктен, $f(x)$ функциясы ($x \to \infty$ умтулганда) кайсы бир тактыкта $\frac{2}{x}$ функциясына окшош жүрүм турумга ээ болот. Ошондуктан

$\varphi(x) = \frac{1}{x}$ деп алсак, экөөнүн катышы нөлдөн айырмалуу пределге ээ болушу мүмкүн

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot(2x^2+1)}{x^3+3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}} = 2 \neq 0.$$

Ошентип $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ функциялары $x \geq 1$ жарым түзүндө оң жана үзгүлтүксүз болуп, II – салыштыруу теоремасын кошумча шартын да канааттандырат. Демек, теореманын кортундусуна ылайык

$$\int_1^{+\infty} \varphi(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\ln x - \ln 1) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty$$

өздүк эмес интегралы таралуучу болгондо, аны менен бир учурда эле

$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4} dx$ өздүк эмес интегралы да таралуучу болот деген бүтүм чыгарабыз.◄

13.3 III – салыштыруу теоремасы. *Эгерде кандайдыр бир $\alpha > 1$ саны жашап, бардык жетишерлик чоң x тер үчүн $0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$ барбарсыздыгы аткарылса (мында M саны x тен көз каранды эмес жана $M > 0$ оң сан), анда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интегралы жыйналуучу болот.*

Эгерде бардык жетишерлик чоң x тер үчүн $f(x) \geq \frac{M}{x}$

болсо (M саны x тен көз каранды эмес жана $M > 0$), анда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *өздүк эмес интегралы таралуучу болот.*

► Теореманын шарты боюнча жетишерлик чоң деп эсептелген A санын алсак, x тин бардык $x \geq A > max\{\alpha,\ a\}$ маанилеринде

$0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$ $(\alpha > 1)$ барабарсыздыктары аткарылат.

$\alpha > 1$ болгондо $\int_A^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha}\, dx$ интегралы жыйналуучу болгондуктан

$\varphi(x) = \frac{M}{x^\alpha}$ деп эсептесек, анда I – салыштыруу теоремасы боюнча $\int_A^{+\infty} f(x)\, dx$ интегралы да жыйналуучу болот. Өз кезегинде, мындан $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ интегралын да жыйналуучулугун келтирип чыгарууга болот, анткени

$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^A f(x)\, dx + \int_A^b f(x)\, dx$ болуп, $b \to +\infty$ умтулганда

$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx$ жана $\int_A^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_A^b f(x)\, dx$

интегралдары акыркы пределдик маанилерине бир учурда жетишет.

Айталы, бардык $x \geq A > max\{\alpha,\ a\}$ болгон x тер үчүн $f(x) \geq \frac{M}{x}$ шарты аткарылсын ($M > 0$). Анда

$\int_A^{+\infty} \frac{M}{x}\, dx = M\ \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x}$ интегралы (7 – мисалды кара) таралуучу болгондуктан, 13.1 – теорема боюнча таралуучу интегралдан чоң болгон $\int_A^{+\infty} f(x)\, dx$ интегралы да таралып, аны менен кошо $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ интегралы да бир учурда таралуучу болуп, теорема далилденет.◄

Мисалы 8) $\int_3^{+\infty} \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5} dx$ интегралын изилдегиле.

► $x \geq 3$ болгондо интеграл алдындагы функциянын бөлүмүнөн $x^2 +$ $+2x + 5$ оң кошулуучуларын таштап жиберсек, бөлүмү кичирейгендиктен бөлчөк чоңоёт, ал эми алымынан «– 2» ни таштасак алымы чоңоюп, бөлчөк дагы чоңойгондуктан,

$0 < \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$ барабарсыздыгы орун алат. Ал эми

$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ өздүк эмес интегралы $\alpha = 2 > 1$ болгондуктан жыйналат. Анда андан кичине болгон $\int_3^{+\infty}\frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5}dx$ интегралы да жыйналуучу болот.◄

13.1.3 Абсолюттук жыйналуучу 1 – роддогу интегралдар

Айталы x тин $x \geq a$ маанилеринде, каалагандай $[a,\ b]$ аралыгында $f(x)$ интегралдануучу функция болсун ($a < b$).

13.2 Аныктама. *Эгерде* $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *жыйналуучу өздүк эмес интеграл болсо, анда* $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *абсолюттук жыйналуучу I – роддогу өздүк эмес интеграл деп аталат. Ал эми* $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *жыйналуучу болгону менен* $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *таралуучу болсо, анда* $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *шарттуу жыйналуучу I – роддогу өздүк эмес интеграл деп аталат.*

Абсолюттук жыйналуучулук боюнча төмөндөгүдөй эки теоремага токтолуп өтөлү.

13.4 Теорема. *Эгерде* $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *интегралы жыйналуучу болсо, анда* $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *интегралы да жыйналуучу болот.*

► Айталы $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интегралы жыйналуучу болсун, б.а.

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b|f(x)|\,dx = L < +\infty$ чектүү пределине ээ болсун. Анда абсолюттук чоңдуктун касиети боюнча $f(x)$ функциясын аныкталуу областындагы бардык x тер үчүн

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ барабарсыздыгы орун алат. Анын бардык тарабына $|f(x)|$ ти кошуп жиберип,

$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2\,|f(x)|$ барабарсыздыктарына ээ болобуз.

Өздүк эмес интегралдын жыйналуучулук шартынын бузулбашына кепилдик берген (3) эрежеси боюнча, $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интегралын

жыйналуучулугунан $2\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ интегралынын жыйналуучулугу келип чыгат. Анда 1 – салыштыруу теоремасы боюнча, андан кичине болгон $\int_a^{+\infty}[f(x)+|f(x)|]\,dx$ интегралы да жыйналуучу болот, же болбосо

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^{+\infty}[f(x)+|f(x)|]\,dx$ пределин чектүү мааниси жашайт.

Экинчи жактан $\forall x \geq a$ үчүн, $f(x)=[f(x)+|f(x)|]-|f(x)|$ көрүнүштөгү теңдеш өзгөртүп түзүүсүн жүргүзүп, $b>a$ шартын канааттандырган бардык b лар үчүн

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b[f(x)+|f(x)|]\,dx-\int_a^b|f(x)|\,dx \qquad (6)$$

теңдештигин түзө алабыз. (6) теңдештигин оң жагында $b\to+\infty$ умтулганда чектүү пределге ээ болгон кошулуучулар тургандыктан, сол жагында да

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx=M<+\infty$ чектүү предели жашап,

$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ интегралын жыйналуучу болору далилденет.◄

Эскертүү: *Бирок* $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *интегралын жыйналуучулугунан ар дайым эле* $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ *интегралын жыйналуучулугу келип чыгат деген жыйынтык чыгарууга болбойт.*

13.5 Теорема. *Эгерде кандайдыр бир* $\alpha>1$ *саны жашап, жетишерлик чоң* x *тер үчүн* $f(x)$ *функциясы*, x *тен көз каранды эмес болгон* M *санына карата*

$$|f(x)|\leq\frac{M}{x^{\alpha}} \qquad (7)$$

шартын канааттандырса, анда $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ *интегралы абсолюттук жыйналуучу болот.*

► Чынында эле, каалагандай $x\geq A>max\{a,\ 0\}$ шартын канааттандырган бардык x сандары үчүн (7) шарты аткарылсын. Анда $\alpha>1$ болгондо $\int_A^{+\infty}\frac{M}{x^{\alpha}}dx$ интегралы жыйналуучу болгондуктан,

андан кичине $\int_A^{+\infty} |f(x)|\,dx$ интегралын жыйналуучулугу келип чыгып, 13.5 – теореманын негизинде $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралы абсолюттук жыйналуучу болот.◄

Мисалдар: 9) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ интегралын жыйналуучулугун изилдегиле.

► $\forall x \geq 1$ шартын канааттандырган x тер үчүн $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ барабарсыздыгы аткарылат. $\alpha = 2 > 1$ болгондо $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ интегралы жыйналгандыктан, 13.5 – теореманын негизинде $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ интегралы абсолюттук жыйналуучу болот.◄

10) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ интегралы абсолюттук жыйналуучу болобу?

► Берилген интегралды $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx = \begin{vmatrix} u = \frac{1}{x}, \ du = -\frac{1}{x^2}dx \\ dv = \cos x\,dx, \ v = \sin x \end{vmatrix} =$

$= \frac{\sin x}{x}\Big|_1^{\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx = \frac{\sin \infty}{\infty} - \frac{\sin 1}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx =$

$= 0 - \sin 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx = -\sin 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ көрүнүштө эсептөөгө болот. Анткени $\frac{\sin \infty}{\infty} = \frac{К}{\infty} = 0$, К саны $-1 \leq К \leq +1$ аралыгында өзгөргөн каалагандай чектүү сан.

Жогорудагы мисалда $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ интегралын жыйналуучулугу далилденгендиктен,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx = -\sin 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx \qquad (8)$$

интегралын да чектүү мааниге ээ болуп, жыйналуучу болору келип чыгат.

Берилген интегралдын абсолюттук жыйналуучу болор – болбосун териштирип көрөлү:

Бирден кичине сандын квадраты катарында

$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ барабарсыздыгы туура болгондуктан, андан $b > 1$ шартын канааттандырган ар кандай b үчүн,

$$\int_1^b \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx = \int_1^b \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \int_1^b \frac{\cos^2 x}{x} dx = \int_1^b \left(\frac{1+\cos 2x}{x}\right) dx = \frac{1}{2}\int_1^b \frac{dx}{x} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos 2x}{x} dx \qquad (9)$$

барабарсыздыгы орун алары келип чыгат. Барбарсыздыктын оң жагындагы биринчи кошулуучу $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x|_1^{\infty} = \infty$ таралуучу (чектелбеген), ал эми экинчи кошулуучу $b \to +\infty$ умтулганда (8) дин негизинде $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ жыйналуучу болгону менен, алардын суммасы чектелбей калып, интеграл таралуучу болот. Ошондуктан (9) дун сол же чоң жагындагы интегралдын предели

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ чектелбейт, б.а. $\int_1^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ интегралы таралуучу болот. Демек $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ интегралы абсолюттук жыйналуучу боло албайт. ◄

Интегралдардын жыйналуучулугун жетиштүү шарттарынын бири катарында Абель – Дрихленин жыйналуучулук шартын далилдөөсүз баяндап өтөбүз.

13.6 Теорема. *Айталы, 1) $x \geq a$ шартын канааттандырган бардык x чекиттеринде $f(x)$ үзгүлтүксүз функция болуп, чектүү $F(x) -$ алгачкы функиясына ээ болсун;*

2) $x \geq a$ болгондо, $g(x)$ үзүлтүксүз дифференцирленүүчү дейли;

3) $x \geq a$ болгондо, $g(x)$ монотондуу кемүүчү болсун;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ пределине ээ болсун.

Анда $\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x) dx$ интегралы жыйналуучу болот.

Мисалы, 11) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$, $\alpha > 0$ интегралын жыйналуучулугун Абель – Дрихленин жыйналуучулук шартына таянып изилдегиле.

► $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ ($\alpha > 0$) деп белгилесек, анда

$x \geq 1$ болгондо $\sin x$ үзгүлтүксүз функция болуп, алгачкы функциясы

$F(x) = -\cos x$ чектелген болот. Ал эми $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ ($\alpha > 0$ функциясы $x \geq 1$ үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү, монотондуу кемүүчү болуп $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0$ пределине ээ болот. Демек Абель – Дрихленин теоремасын шарттарын бардыгы аткарылат, анда бул теореманын негизинде

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$ интегралы жыйналуучу болот.◄

13.1.4 I – роддогу өздүк эмес интегралдын башкы мааниси

Чектелбеген $(-\infty, b]$ аралыгы боюнча $f(x)$ функциясынан алынган интеграл деле

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ символу менен белгиленип, I – роддогу өздүк эмес интеграл деп аталат. Аны

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (10)$$

көрүнүштөгү эреже менен эсептейбиз. Эгерде аталган предел чектүү мааниге ээ болсо, анда $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ интегралы жыйналуучу, ал эми предели жашабаса же чексиз болсо, таралуучу деп аталат.

(1) интегралдардагы үчүнчү болуп жазылган $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

көрүнүштөгү I – роддогу өздүк эмес интеграл, эки жагынан тең чектелбеген $(-\infty, +\infty)$ аралыгы боюнча алынып, кош

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (11)$$

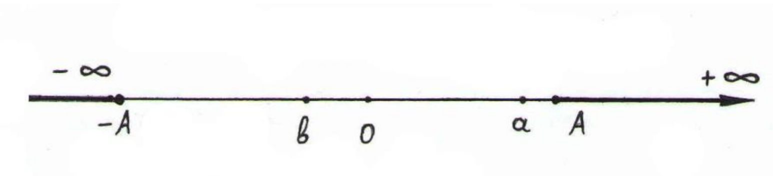
предели чектүү мааниге ээ болгондо жыйналуучу, ал эми чексиз пределге ээ болсо, же жашабаса таралуучу деп аталат. Мында $b \to +\infty$, $a \to -\infty$ умтулуу процесстери бири – биринен көз каранды болбой, өз алдынча жүрүп, эки учурда тең чектүү пределдер жашашса гана $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ өздүк эмес интегралы жыйналуучу болот. Ошондуктан, айрым учурларда (11) эреже менен эсептөөнүн натыйжасы, берилген өздүк эмес интегралдын таралуучулугун көрсөтсө да, интеграл башкы бөлүгүн маанисинде жыйналуучу болуп калышы мүмкүн.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ өздүк эмес интегралдын башкы бөлүгүн аныктоо үчүн, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралын бири – бири менен байланышы жок эки башка $a,\ b$ чектүү төмөнкү жана жогорку пределдерин карама – каршы белгидеги бир эле А саны менен алмаштырып (13.2 – чийме), сезилбес каталык кетирүү менен (11) ди

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty}\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} f(x)\,dx \qquad (12)$$

эсептөө эрежеси менен алмаштырабыз.

(12) ни I – роддогу өздүк эмес $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ интегралын Коши боюнча башкы мааниси деп атап, интегралдын алды жагына «valeur principal – башкы маани» сөзүн башкы «v.p.» тамгаларын кошуп жазабыз.



13.2-чийме

Мисалы 12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$ интегралын изилдейли.

►(11) эрежесин колдонсок ($b \to +\infty$, $a \to -\infty$ бири – биринен көз каранды болбой, өз алдынча умтулушат),

$\int_a^b \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}$ интегралын предели

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}\ =\begin{cases}\ \ \infty, \text{ эгерде } b\to+\infty \text{ мурда келсе,}\\ \text{аныкталбайт, } a\to-\infty \text{ мурда жетсе}\end{cases}$$

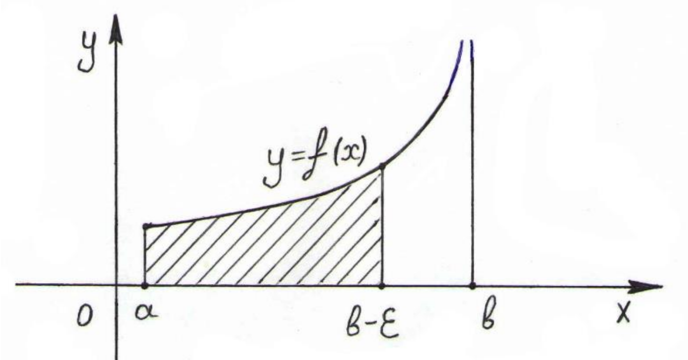
жашабагандыктан, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}$ таралуучу интеграл болот. Ошол эле учурда анын башкы мааниси

v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{1+A^2}{1+A^2}=\frac{1}{2}\ln 1=\frac{1}{2}\cdot 0=0$ чектүү пределге ээ болуп, берилген интеграл Коши боюнча башкы мааниде жыйналуучу болот.◄

§ 13.2 Интегралдоо аралыгында чектелбеген функциялардын II – роддогу интегралдары

13.2.1 II – роддогу өздүк эмес интегралдын аныктоосу

Чектелген $[a,\ b]$ кесиндиси боюнча Римандын маанисиндеги $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралын жашашын зарыл шарты катарында, берилген кесиндиде $f(x)$ функциясын чектелген болушу эсептелерин билебиз (12.1.3, 1 – зарыл шарт). Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисин конкреттүү кайсы бир чекитинде аныкталбаса жана анын жакынкы чеке белинде чектелбесе, анда интегралдоонун жаңы аппараттарын киргизүү менен, интегралдоо кесиндисинде чектелбеген функцияларды интегралдоо мүмкүнчүлүктөрүн көргөзө алабыз. Мисалы, $f(x)$ функциясы кесиндинин бүтөр учундагы b чекитинде жана анын жетишерлик кичине сол тараптагы чеке белинде чектелбеген функция болсун (13.3 – чийме). Анда $[a,\ b]$ кесиндиси боюнча, $f(x)$ функциясын Римандын маанисиндеги (12.2 – аныктама боюнча) интегралын жашабасы белгилүү.



13.3-чийме

Айталы, кандайдыр бир жетишерлик кичине деп алынган каалагандай $\varepsilon>0$ санына карата түзүлгөн $[a,\ b-\varepsilon]$ кесиндисинде

$f(x)$ функциясы интегралдануучу болуп, ал эми ($b-\varepsilon,\ b$) интервалында чектелбей, интегралданбоочу болсун дейли. Бул учурда, $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ интегралын жогорку предели тандалган ε го жараша өзгөрүп тургандыктан, интегралдын мааниси жогорку предели өзгөрүлмө интеграл катарында, $J(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ көрүнүштөгү функция болот. Ал эми жалпы $[a,\ b]$ кесиндисин b учунда аныкталбаган жана чектелбеген $f(x)$ функиясынан алынуучу $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы, II – роддогу өздүк эмес интеграл деп аталат.

13.3 Аныктама. *Эгерде* $\varepsilon\to 0+$ *(оң жактан) умтулганда* $J(\varepsilon)$ *функциясы чектүү* L *пределине ээ болсо, анда* II *– роддогу өздүк эмес* $\int_a^b f(x)\,dx -$ *интегралды жыйналуучу деп атап,*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx=L \qquad (13)$$

эрежеси менен эсептейбиз. Ал эми (13) предели жашабаса же чектүү сан болбосо, анда таралуучу деп аталып, интеграл эч кандай сандык мааниге ээ боло албайт.

Мисалы, 13) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ интегралын жыйналуучулугун изилдейли.

► Интеграл алдындагы $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ функциясы $[0,\ 1]$ кесиндисин оң учундагы $x=1$ чекитинде аныкталган эмес жана ага $x\to 1-$ (сол жактан) жакындаганда $f(x)\to+\infty$ умтулуп чектелбегени менен, жетишерлик кичине каалагандай $\varepsilon>0$ санына карата түзүлгөн

$[0,\ 1-\varepsilon]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болгондуктан, интегралдануучу болот. Анда

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\arcsin x\Big]_0^{1-\varepsilon}=$$

$=\lim_{\varepsilon\to 0+}(\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin 0)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ келип чыгып, берилген интегралдын жыйналуучу экендиги далилденет.◄

Ошондой эле, $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисин сол учундагы $x=a$ чекитинде аныкталбаса, бирок $[a+\varepsilon,\ b]$ кесиндисинде чектелип

интегралдануучу болсо, ал эми $(a,\ a+\varepsilon)$ интервалында чектелбесе, анда II – роддогу өздүк эмес интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad (14)$$

көрүнүштө эсептелет ($\varepsilon > 0$). Мисалы

14) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралын изилдегиле ($\alpha > 0$).

► $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ функциясы $\alpha > 0$ болгондо $[0,\ 1]$ кесиндисин сол учундагы $x = 0$ чекитинде аныкталган эмес жана чектелбейт. Бирок $[0+\varepsilon,\ 1]$ кесиндисинде интегралдануучу, ошондуктан $\alpha \neq 1$ болгондо

$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ маанисин таап, (14) эрежеси боюнча пределге өтсөк, мисалдагы өздүк эмес интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{эгерде } \alpha < 1 \text{ болсо жыйналуучу,} \\ +\infty, & \text{эгерде } \alpha > 1 \text{ болсо таралуучу} \end{cases}$$

болорун көрөбүз. Ал эми $\alpha = 1$ болгондо

$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln x\Big]_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\to} +\infty$ чектүү пределге ээ болбогондуктан, таралуучу болот.◄

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисин учтарында эмес, анын кайсы бир ички с чекитинде ($a < \mathrm{c} < b$) аныкталбаса жана анын жетишерлик кичине чеке белинде чектелбесе, анда берилген кесиндини

$[a,\ b] = [a,\ \mathrm{c}] \cup [\mathrm{c},\ b]$ көрүнүштө ажыратып жазып, интеграл эсептөөдөгү өзгөчөлүктү (13), (14) учурларга келтиребиз.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{c}}^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+ \\ \varepsilon_2\to 0+}}\left\{\int_a^{\mathrm{c}-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{c}+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\right\} \qquad (15)$$

13.2.2 Оң функциялардын II – роддогу өздүк эмес интегралдарын салыштыруу ыкмалары

I – роддогу өздүк эмес интегралдар сыяктуу эле, көпчүлүк практикалык эсептөөлөрдө II – роддогу өздүк эмес интегралдардын сандык маанисин табуу башкы орунда турбастан, алардын жыйналуучулугун билүү башкы орунда болуп, алар сүрөттөгөн процесстердин бүтүү келечеги кызыктырат.

13.7 Теорема (салыштыруу). *Айталы* $f(x)$ *жана* $\varphi(x)$ *функциялары жетишерлик кичине деп алынган каалагандай* $\varepsilon > 0$ *санына жараша түзүлгөн* $[a,\ b-\varepsilon]$ *кесиндисинде интегралдануучу болушуп,* $(b-\varepsilon,\ b)$ *интервалында чектелишпесин жана* $[a,\ b)$ *жарым сегментинде* $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ *шартын канааттандырышсын.*

Анда

1) *Эгерде* $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *интегралы жыйналуучу болсо, анда* $\int_a^b f(x)\,dx$ *интегралы да жыйналуучу болот;*

2) *Эгерде* $\int_a^b f(x)\,dx$ *интегралы таралуучу болсо,* $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ *да таралуучу интеграл болот.*

► Айталы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx = L$ чектүү предели жашап, $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралы жыйналуучу болсун. Экинчи жактан $[a,\ b)$ аралыгында $f(x) \ge 0$ болгондуктан, $b-a > \varepsilon$ шартына баш ийген

$\forall\varepsilon > 0$: $J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ интегралын мааниси оң жана ε кичинергенде кемибөөчү функция болот, анткени интегралдын жогорку $b-\varepsilon$ предели чоңойгондо интегралдык сумма өсүп олтурат. Мындан сырткары

$\forall x \in [a,\ b)$: $f(x) \le \varphi(x)$ шарты аткарылгандыктан,

$$\forall\varepsilon > 0:\ \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \le \int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx \qquad (16)$$

барабарсыздыгы орун алат. Ал эми $\int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$ интегралы, шарт боюнча жыйналуучу деп эсептелген $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралынан ашып

кетпейт. Ошондуктан кандай гана $\varepsilon > 0$ санын алсак да, $J(\varepsilon)$ функциясы $\varepsilon \to 0+$ умтулганда

$$J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx = L$$

жогору жагынан чектелген бойдон калып,

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} J(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \le L$ чектүү предели жашайт

же $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы жыйналуучу болот.

Теореманын экинчи кортундусун далилдөөнү тескерисинен жүргүзөбүз. Эгерде, $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы таралуучу болсо деле, $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралы жыйналуучу болот деп тескерисинче ойлосок, анда $\int_a^b f(x)\,dx$ таралгандыктан, $\lim_{\varepsilon\to 0+} J(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \infty$ чексиз пределине ээ болот. Экинчи жактан $\forall x \in [a,\ b)$: $f(x) \le \varphi(x)$ аткарылгандыктан, (16) барабарсыздыгы орун алат. Мындан чексиз пределине умтулуп жаткан $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ интегралынан чоң болгон, $\int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx$ интегралы да чексиз пределине ээ болушу, же болбосо

$\int_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралын таралуучулугу келип чыгып, тескери оюбуздун туура эмес экендиги далилденет. ◄

Төмөндөгү салыштыруу теоремасын далилдөөсүз кабыл алабыз.

13.8 Теорема (салыштыруу). *Айталы $f(x)$, $\varphi(x)$ функциялары $[a,\ b)$ аралыгында оң болушуп, $x = b$ чекитин жакынкы чеке белинде чектелбеген функциялар болушсун. Мындан сырткары*

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k > 0 \qquad (17)$$

чектүү предели жашасын.

Анда $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ интегралдарын экөөсү тең бир учурда таралуучу же жыйналуучу болушат.

Мисал. 15) $\int_0^{+\infty} \frac{arc\text{tg}\, x}{x^\alpha}\, dx$ $(\alpha > 0)$ интегралын жыйналуучулугун изилдегиле.

► Берилген интеграл I – жана II – роддогу интегралдардын белгилерин кармап турат, анткени биринчиден интегралдын жогорку предели чексиз, экинчиден аралыктын сол учундагы $x = 0$ чекитинде интеграл алдындагы $f(x) = \frac{arc\text{tg}\, x}{x^\alpha}$ функциясы аныкталган эмес жана анын жакынкы чеке белинде $\alpha > 0$ сандары үчүн $x \to 0$ жакындаганда, $f(x)$ чексизге карап умтулат. Ошондуктан берилген интегралдын жыйналуучулугун изилдөөдө, $(0, +\infty)$ интегралдоо аралыгын экиге бөлөбүз: 1) $f(x) = \frac{arc\text{tg}\, x}{x^\alpha}$ функциясын $x = 0$ чекитиндеги өзгөчөлүгүн эске алып $(0, 1]$ аралыгына;

2) $x \to \infty$ умтулганда $f(x)$ тин өзгөрүшүнө карап $[1, +\infty)$ аралыгына.

Анда берилген интегралды

$$\int_0^{+\infty} \frac{arc\text{tg}\, x}{x^\alpha}\, dx = \int_0^1 \frac{arc\text{tg}\, x}{x^\alpha}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{arc\text{tg}\, x}{x^\alpha}\, dx \qquad (18)$$

көрүнүштө ажыратып жазууга болот.

(18) деги интегралдардын биринчиси II – роддогу өздүк эмес интеграл болуп, анын жыйналуучулугун изилдөө үчүн 8 – теореманы пайдаланабыз. Ал үчүн $f(x) = \frac{arc\text{tg}\, x}{x^\alpha}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ деп алсак, $x \to 0$ чексиз жакындап келгенде $arc\text{tg}\, x \sim x$ болгондуктан, (17) пределдин маанисин

$\lim\limits_{x \to 0-} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{x^{\alpha-1}\, arc\text{tg}\, x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x \to 0-} \frac{x}{x} = 1 > 0$ көрүнүштө табууга болот. Жогоруда каралган мисалдарга карап,

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$$

интегралы $\alpha - 1 < 1$ же $\alpha < 2$ болгондо жыйналуучу болорун

көрөбүз. Анда 8 – теорема боюнча аны менен бир мезгилде

$$\int_{0}^{1} \frac{arc\text{tg}\, x}{x^{\alpha}}\, dx$$

интегралы да $\alpha < 2$ болгондо жыйналуучу болот.

(18) теңдештигин сол жагындагы экинчи $\int_{1}^{+\infty} \frac{arc\text{tg}\, x}{x^{\alpha}}\, dx$ кошулуучусу I – роддогу өздүк эмес интеграл болот. 2 – салыштыруу теоремасын пайдалануу үчүн $f(x) = \frac{arc\text{tg}\, x}{x^{\alpha}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ деп алып пределге өтсөк, аталган теореманын шартын канааттандырган

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^{\alpha}\, arc\text{tg}\, x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{x \to \infty} arc\text{tg}\, x = \frac{\pi}{2} \neq 0$ мааниге ээ болобуз.

Ал эми

$$\int_{1}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \text{ интегралы } \alpha > 1$$

болгондо жыйналуучу болгондуктан, 2 – салыштыруу теоремасы боюнча аны менен бир учурда,

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\; dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{arc\text{tg}\, x}{x^{\alpha}}\, dx$$

интегралы да жыйналуучу болот. Демек, (18) теңдештиктин сол жагындагы кошулуучулардын экөөсү тең $1 < \alpha < 2$ болгондо жыйналуучу интегралдар болушат.◄

13.2.3 Абсолюттук жыйналуучу II – роддогу өздүк эмес интегралдар

Оболу абсолюттук жыйналуучулукка аныктама берели:

13.4 Аныктама. *Эгерде* II – *роддогу* $\int_a^b |f(x)|\, dx$ *өздүк эмес интегралы жыйналуучу болсо, анда* II – *роддогу* $\int_a^b f(x)\, dx$ *өздүк эмес интегралы абсолюттук жыйналуучу деп аталат.*

13.9 – Теорема. *Эгерде* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *интегралы жыйналуучу болсо, анда* $\int_a^b f(x)\,dx$ *интегралы да жыйналуучу болот.*

► $f(x)$ функциясын аныкталуу областындагы бардык x тер үчүн

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \;\Rightarrow\; 0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$

барабарсыздыктары аткарылат. Анда (6) теңдештигин жана 13.7 – салыштыруу теоремасын негизинде $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралын жыйналуучулугу келип чыгат.◄

13.10 Теорема. *Айталы,* $f(x)$ *функциясы алынган жетишерлик кичине* $\varepsilon > 0$ *санына жараша түзүлгөн* $(b-\varepsilon,\ b)$ *интервалында гана чектелбеген болсун. Эгерде* b *чекитине чексиз жакын жайгашкан бардык* x *чекиттери үчүн* $(x < b)$*, кандайдыр бир оң* $\alpha < 1$ *саны жашап,*

$|f(x)| \le \frac{M}{(b-x)^{\alpha}}$ *барабарсыздыгы орун алса,*

анда $\int_a^b f(x)\,dx$ *интегралы абсолюттук жыйналуучу болот* ($M > 0$ *саны* x *тен көз каранды эмес*).

Теореманын далилдөөсү жогорудагы 14.7 – салыштыруу

теоремасынан келип чыгат.

Эскертүү. *II – роддогу өздүк эмес интегралды*

$b - x = \frac{1}{t}$ же $x - a = \frac{1}{t}$ *белгилөөлөрүн киргизүү менен, I – роддогу өздүк эмес интегралга келтирүүгө болот.*

13.2.4 II – роддогу өздүк эмес интегралдын башкы мааниси

Айталы $[a,\ b]$ кесиндисин ичинен кайсы бир ички $x = c$ чекити $(a < c < b)$ табылып, $f(x)$ функциясы c чекитинде аныкталбаганы менен, жетишерлик кичине каалагандай $\varepsilon > 0$ санына жараша түзүлгөн $[a,\ c-\varepsilon]$ жана $[c+\varepsilon,\ b]$ кесиндилеринде интегралдануучу болсун.

Анда $\int_a^b f(x)\,dx$ өздүк эмес интегралын эки II – роддогу өздүк эмес интегралдардын суммасы катарында

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{c}}^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+\\ \varepsilon_2\to 0+}} \left\{\int_a^{\mathrm{c}-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{c}+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\right\} \qquad (19)$$

көрүнүштө эсептөөгө болот. Бирок $\varepsilon_1 \to 0+$ жана $\varepsilon_2 \to 0+$ умтулуу процесстери бири – биринен көз каранды болбой, өз алдынча жүрүп олтуруп, эки предел тең жыйналуучу болгондо гана $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы жыйналуучу болот. Эгерде бири – биринен умтулуу табыяттары боюнча айырмаланышкан $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ сандарын, бир эле $\varepsilon > 0$ саны менен алмаштырсак ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$), анда сезилбес каталыкка жол берүү менен (19) эрежесин Коши түшүнүгүндөгү башкы маани деп аталуучу

$$\mathrm{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{\mathrm{c}-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{c}+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right\} \qquad (20)$$

эрежеге алмаштыра алабыз. Мында $\mathrm{v.p.}-$«өздүк эмес интегралдын башкы мааниси» - деген түшүнүктү билдирет.

Айрым учурларда өздүк эмес интеграл (19) маанисинде таралуучу болгону менен, Коши түшүнүгүндөгү (20) маанисинде жыйналуучу болуп калышы мүмкүн.

Мисалы, 16) $\int_a^b \frac{dx}{x-\mathrm{c}}$, $a < \mathrm{c} < b$ интегралын изилдегиле.

► Интеграл алдындагы $f(x) = \frac{1}{x-\mathrm{c}}$ функциясы $[a,\ b]$ кесиндисин ички $x = \mathrm{c}$ чекитинде аныкталбайт, анткени бөлчөктүн бөлүмү ушул чекитте нөлгө айланат. Бирок жетишерлик кичине деп эркин тандалган ε_1 жана ε_2 сандарына карата түзүлгөн $[a,\ c-\varepsilon_1]$ жана $[c+\varepsilon_2,\ b]$ кесиндилеринде интегралдануучу болот. Анда (19) эрежеси боюнча

$$\int_a^{\mathrm{c}-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-\mathrm{c}} + \int_{\mathrm{c}+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-\mathrm{c}} = (\ln|x-\mathrm{c}|)\Big|_a^{\mathrm{c}-\varepsilon_1} + (\ln|x-\mathrm{c}|)\Big|_{\mathrm{c}+\varepsilon_2}^b =$$

$$= \ln\varepsilon_1 - \ln|a-\mathrm{c}| + \ln(b-\mathrm{c}) - \ln\varepsilon_2 = \ln\frac{b-\mathrm{c}}{\mathrm{c}-a} + \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

интегралдарын предели катарында, берилген өздүк эмес интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+\\ \varepsilon_2\to 0+}} \left\{\ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right\} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0+\\ \varepsilon_2\to 0+}} \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} =$$

$$= \begin{cases} \text{жашабайт, эгерде } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \text{ өз алдынча умтулса;} \\ \ln\frac{b-c}{c-a}, \text{ эгерде } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \text{ чогуу умтулушса.} \end{cases}$$

Демек, берилген өздүк эмес интеграл Коши боюнча башкы мааниде гана жыйналуучу болот

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}.◄$$

Көнүгүүлөр

Төмөндөгү өздүк эмес интегралдарды эсептегиле:

1. а) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2},\ \ a>0$; б) $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; г) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

д) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$; е) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; з) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$;

и) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; к) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$; л) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$;

м) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg\ x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

2. а) Өздүк эмес интегралдардын жыйналуучулугун изилдегиле:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^4-x^2+1}$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$; г) $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$;

д) $\int\limits_0^1 x^p \ln^q\frac{1}{x}\,dx$; е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{1+x^n},\ n\geq 0$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg\ x\, dx}{x^n},\ a\neq 0$;

з) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)\ dx}{x^n}$; и) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m arctg\ x\, dx}{2+x^n}$, $n \geq 0$;

к) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x\ dx}{1+x^n}$, $n \geq 0$.

3. Абсолюттук жана шарттуу жыйналуучулугун изилдегиле:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (көрсөтмө $|\sin x| \geq \sin^2 x$); б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100} dx$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\sec x)\, dx$.

4. Башкы мааниси боюнча жыйналуучулугун изилдегиле:

а) $\text{v.p}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; б) $\text{v.p}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$; в) $\text{v.p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$;

г) $\text{v.p}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} arctg\ x\, dx$.

Жооптору: 1. а) $\frac{1}{a}$; б) -1 ; в) π ; г) π; д) $\frac{2}{3}\ln 2$; е) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; ж) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;

З) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; и) $\frac{\pi}{2}$; к) $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; л) 0 ; м) $\frac{\pi}{2}-1$.

2. а) Жыйналуучу ; б) Жыйналуучу ; в) Таралуучу ;

г) $p > 0$ болгондо жыйналуучу ; д) $p > -1$ жана $q > -1$ болгондо жыйналуучу ; е) $m > -1$, $n - m > 1$ болгондо жыйналуучу ;

ж) $1 < n < 2$ болгондо жыйналуучу ; з) $1 < n < 2$ болгондо жыйналуучу ; и) $m > -2$, $n - m > 1$ болгондо жыйналуучу.

3. а) Абсолюттук эмес жыйналуучу ; б) Абсолюттук эмес жыйналуучу ;

в) Жыйналуучу .

4. а) $\ln\frac{1}{2}$; б) 0 ; в) π ; г) 0 .

XIV ГЛАВА. КАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ

§ 14.1 Сандык катарлар

14.1.1 Сандык катар жана анын суммасы

Айталы, чексиз сандардан куралган

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ удаалаштыгы берилсин $(\forall n\colon a_n \in R,\ n \in N)$. Анда анын мүчөлөрүнөн түзүлгөн

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots \qquad (1)$$

көрүнүштөгү чексиз сумманы, сандык катар деп айтабыз. Ар бир кошулуучулар сандык катардын мүчөлөрү, ал эми a_n катардын $n-$ чи же жалпы мүчөсү деп айтылып, атайын эскертүү берилбесе (1) ди «сандык» сөзүн кошпой эле «катар» деп айта беребиз.

Турмуштук маселелерди чечүүдө, жаратылыш кубулуштарын үйрөнүүдө көптөгөн чексиз сандардын суммаларына кездешип, бул чексиз процесстердин келечегин аныктаган жыйынтык сумманын табылар-табылбасына кызыгып келебиз. Бирок, алардын баарын эле катар деп айтууга болбойт. Анткени катардын мүчөлөрү (кошулуучулар) номерлеп чыгууга мүмкүн болгондой кезектешип жайгашып, ар бир кошулуучунун өзүнө гана тиешелүү жазылуу ирети же оруну бар. Орун алмаштыруудан сумма өзгөрбөйт деген пикирге таянып, чексиз кошулуучулардан турган катардын мүчөлөрүн, каалгандай баш аламан тартипте жаза албайбыз. Ошентип катарлар теориясы, кошулуучулары кайсы бир ырааттуулукта жазылган, айрым чексиз суммалардын (катарлардын) чектүү суммаларын жашашын болжолдоо жана эсептеп чыгуу мүмкүнчүлүктөрүн изилдөө максатында түзүлгөн. Ошондой эле, ирети жок чексиз суммалар аркылуу туюнтулган процесстерди да, жакындаштырылган кайсы бир катар менен алмаштырып, процесстердин соңку абалдарын болжолдоого мүмкүнчүлүк алабыз. Ошентип, аягы чексизге чейин уланган процесстерди, математикалык тилде моделдештирип жазууга карата, жаңы символ-тамгаларды, эреже-амалдарды киргизебиз.

Катардын алгачкы n сандагы мүчөлөрүн суммасын S_n деп белгилеп, аны $n-$ чи жекече сумма дейбиз. Чектүү n сандагы кошулуучулардын суммасын эсептеп чыгуу мүмкүн болгондуктан, жекече суммалардан түзүлгөн $\{S_n\}$:

$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$ же

$$S_1,\ S_2,\ S_3, \ldots,\ S_n,\ \ldots \qquad (2)$$

удаалаштыгын түзүүгө болот. Мындан n номери чоңойгон сайын (2) удаалаштыктын $n-$ мүчөсү болгон S_n жекече суммасы, улам (1) катардын суммасына жакындап бара берерин байкайбыз.

14.1 Аныктама. *Эгерде жекече суммалардын $\{S_n\}$ удаалаштыгы чектүү S пределине*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (3)$$

ээ болсо, анда (1) ди ***жыйналуучу катар****, ал эми S санын катардын суммасы деп айтабыз жана*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$$

теңдештиги орун алат деп эсептейбиз. Ал эми жекече суммалардын $\{S_n\}$ удаалаштыгы чектүү пределге ээ болбосо же предели жашабаса, анда (1) катарын ***таралуучу же суммасы эсептелбей турган катар*** *дейбиз.*

Мисалы, 1) $q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ *катарын*

жыйналуучулугун изилдейли.

►Берилген катардын $n-$ чи жекече $S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ суммасы: биринчи мүчөсү $b_1 = q$, тийиндиси q болгон геометриялык прогрессия болорун байкайбыз. Ал эми, геометриялык прогессиянын алгачкы n мүчөлөрүн S_n суммасы төмөнөгүдөй эсептелет:

$$S_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}\ .$$

Анда аныктамага ылайык, жыйналуучулугун изилдөөнү талап кылган катардын суммасын (3) формуласы боюнча

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{q-q^{n+1}}{1-q}=\frac{q-\lim\limits_{n\to\infty}q^{n+1}}{1-q}=$$

$$=\begin{cases}\boxed{\textit{эгерде } |q|<1 \textit{ болсо } S=\dfrac{q}{1-q},}\\ \textit{эгерде } |q|>1 \textit{ болсо, } \textbf{\textit{чектүү предели жок,}}\end{cases}$$

көрүнүштө эсептөөгө болот. Анткени $|q|<1$ болгондо

$\lim\limits_{n\to\infty}|q|^{n+1}=0$, ал эми $|q|>1$ болгондо $|q|^{n+1}$ монотондуу өсүп жогору жагынан чектелбегендиктен, ал $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^{n+1}=+\infty$ пределине ээ.

Ал эми $|q|=1$ болсо, анда абсолюттук чоңдуктун

$|q|=\begin{cases}q, \textit{эгерде } q\geq 0 \textit{ болсо};\\ -q, \textit{эгерде } q<0 \textit{ болсо}\end{cases}$ аныктамасына таянып, $q=\begin{cases}1, & \textit{же}\\ -1\end{cases}$ гана болушу мүмкүн экендигин көрөбүз:

а) $q=1$ болсо, анда берилген $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{S_n \textit{ же алгачкы } n \textit{ кошулуучу}}+1+\ \ldots$ катарын $n-$ жекече суммасы $S_n=n$ болуп, (3) пределин мааниси $+\infty$ ге умтулат, б.а. катар таралуучу болот.

б) $q=-1$ болсо, катар q нун даражасын жуп же так көрсөткүч экендигине жараша

$\underbrace{-1+1-1+\ \ldots(-1)^n}_{S_n}+1+\ \ldots.$ көрүнүштө жазылат. Ошентип $q=-1$ болсо, $n-$жекече суммасы: $S_n=\begin{cases}1, \textit{эгерде } n \textit{ так сан болсо};\\ 0, \textit{ эгерде } n \textit{ жуп сан болсо}\end{cases}$ кош мааниге ээ болуп, (3) предели анык бир мааниге ээ болбойт, б.а. анын предели жашабайт, анда катар таралуучу болот.

Ошентип $|q|<1$ болгондо гана берилген катар чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия деп аталып,

$$q+q^2+q^3+\ \ldots+q^n+\ \ldots=\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q} \qquad (4)$$

көрүнүштөгү чектүү суммага ээ болот.◄

2) Гармоникалык катар деп аталган

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \dots+\frac{1}{n}+\ \dots$$

чексиз суммасын таралуучу болорун далилдегиле.

► (2) сыяктуу жекече суммалардын $\{S_n\}$ удаалаштыгын түзүп, аны таралуучу $\{\ \ln(n+1)\ \}$ удаалаштыгы менен салыштырабыз. Ал үчүн

$\forall n\in N\colon\ \frac{1}{n}>\int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{x}$ *барабарсыздыгын колдонуп, гармоникалык*

катардын ар бир $\frac{1}{n}$ мүчөлөрүн, алардан кичине болгон

$\int\limits_n^{n+1}\frac{dx}{x}$ сандары менен алмаштыралы. Бул учурда жекече суммалардын

$\{S_n\}$ удаалаштыгы, андан кичине

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int\limits_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int\limits_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$$

болгон $\{\ \ln(n+1)\ \}$ удаалаштыгы менен салыштырылган болот. Демек, $\forall n\in N\colon S_n>\ln(n+1)\ \ \Rightarrow\ \ \lim\limits_{n\to\infty}S_n>\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$ болгондуктан ($\ln(n+1)-$ монотондуу өсөт), удаалаштыктарды салыштыруу теоремаларын негизинде $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ пределин чектүү мааниси жашабай тургандыгы же гармоникалык катардын да таралуучу болору далилденген болот.◄

3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ \dots+\frac{1}{4n^2-1}\ +\ \dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ *катарын*

жыйналуучулугун изилдегиле.

► Бөлүмү $4n^2-1=(2n-1)(2n+1)$ көрүнүштөгү көбөйтүүчүлөргө ажырагандыктан, катардын жалпы мүчөсүн

$a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$ бөлчөктөрдүн айырмасы катарында жазсак, анда берилген катардын $n-$ жекече суммасын

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) + \dots \right] =$$

$= \left|\begin{matrix}\textit{ички кашааларды} \\ \textit{ачып}\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$ көрүнүшкө өзгөртүп түзүүгө

болот. Демек каралган катардын суммасы (3) эрежесин негизинде

$S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$ санына барабар болот.◄

14.1.2 Жыйналуучу катарлардын негизги касиеттери

Айталы, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

сандык катары берилсин. Анда катардын алгачкы n кошулуучуларын таштап жибергенден кийинки калган

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+2} + \dots \qquad (5)$$

бөлүгүн, берилген катардын $n-$ чи калдык бөлүгү деп айтабыз. Ошентип, (1) катарын

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n + R_n$$

көрүнүштө жазып, калдык бөлүктү катардын суммасы менен, $n-$ жекече сумманын айырмасы катарында

$$R_n = S - S_n \qquad (6)$$

жазабыз. (6) дан жыйналуучу катардын калдык бөлүгүн

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$$

чексиз кичине чоңдук болорун көрөбүз. Ошондуктан кайсы бир катардын жыйналуучулугун ырастоо үчүн, анын калдык бөлүктөрүн изилдешет. Калдыкты изилдөөнүн Коши, Пеано ж.б.у.с. тибиндеги ыкмалары бар.

14.1 Теорема. *Эгерде (1) катары жыйналуучу болсо, анда анын каалагандай калдык бөлүгү да жыйналуучу болот. Ошондой эле, берилген катардын кандайдыр бир калдык бөлүгү жыйналуучу катар болсо, анда берилген катардын өзү да жыйналуучу болот.*

► Берилген (1) катарын $m = (N + k) -$ мүчөсүнө чейинки кошулуучулары менен

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N}_{S_N} + \underbrace{a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k}}_{S_k^*}}_{S_m = S_{N+k}} + \dots \quad (7)$$

жазып, анын $S_k^* -$ чи калдык бөлүгүн

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+k}}_{S_k^*} + \dots \qquad (8)$$

бөлүп алалы. (7) катардын $S_m = S_{N+k}$ жекече суммасы менен, $N -$чи S_N жекече суммасын арасында

$$S_{N+k} = \sum_{n=1}^{N+k} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{N+k} a_n = S_N + S_k^*$$

байланышы бардыгын байкайбыз. Мындагы S_k^* кошулуучусун (8) калдык катарынын $k -$ чи жекече суммасы деп эсептөөгө болгондуктан, аны $S_k^* = S_{N+k} - S_N$ көрүнүштө көчүрүп жазалы.

Айталы, берилген (1) катар жыйналуучу болуп, чектүү S суммасына ээ болсун $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty} S_m = S$. Бул учурда $\{S_k^*\}$ удаалаштыгы да чектүү сандардын айырмасы катарында

$$\lim_{k\to\infty} S_k^* = \lim_{k\to\infty}(S_{N+k} - S_N) = \lim_{k\to\infty}(S_{N+k} - S_N) = \left| \begin{matrix} m = N + k, \\ k \to \infty \Leftrightarrow m \to \infty \end{matrix} \right| =$$

$= \lim\limits_{m\to\infty}(S_m - S_N) = S - S_N$ чектүү пределге ээ болорун көрөбүз (S_N – чектүү сандагы кошулуучулардын суммасы катарында чектүү).

Демек, (1) катары жыйналуучу болсо, анда (8) катары, б.а. (1) катарынын $N -$ чи калдык бөлүгү да жыйналуучу болору далилденди.

(1) катарын кандайдыр бир (8) калдык бөлүгү жыйналуучу болуп чектүү P_N суммасына ээ болсун, анда (1) катарын $m -$чи жекече S_m суммасын $(m = N + k)$

$S_m = S_{N+k} = S_N + S_k^*$ көрүнүштө туюнтуп, $k \to \infty \Leftrightarrow m \to \infty$ умтулгандагы пределге өтсөк

$\lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{k\to\infty} S_{N+k} = \lim\limits_{k\to\infty}(S_N + S_k^*) = S_N + \lim\limits_{k\to\infty} S_k^* = S_N + P_N$ чектүү предели табылып, жекече суммалардын $\{S_m\}$ удаалаштыгын жыйналуучулугу келип чыгат, же 14.1 аныктамасынын негизинде берилген (1) катары жыйналуучу болот.◄

Натыйжа. *Жыйналуучу катардын чексиз кошулуучуларын арасынан кезегин бузбай чектүү сандагы кошулуучуларды алып салуудан, же чектүү сандагы кошулуучуларды кошуп жазуудан катардын жыйналуучулугу бузулбайт.*

14.2 Теорема. *Айталы, жалпы мүчөлөрү a_n, b_n болгон катарлар жыйналуучу болушуп, тиешелүү түрдө*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

чектүү A жана B суммаларына ээ болушсун. Анда

$\forall\, \alpha, \beta \in R$: $c_n = \alpha \cdot a_n \pm \beta \cdot b_n$ *кошулуучуларына карата түзүлгөн*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n \pm \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot A \pm \beta \cdot B \qquad (9)$$

катары жыйналуучу болуп, суммасы $\alpha \cdot A \pm \beta \cdot B$ *санына барабар болот.*

► Чынында эле, (9) катарын n −жекече суммасын

$$S_n = \alpha \cdot a_1 \pm \beta \cdot b_1 + \alpha \cdot a_2 \pm \beta \cdot b_2 + \ldots + \alpha \cdot a_n \pm \beta \cdot b_n =$$

$$= \alpha \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm \beta \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = \alpha \cdot A_n \pm \beta \cdot B_n$$

көрүнүштө ажыратып жазып ($A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ жыйналуучу катарлардын n −жекече суммалары), пределге өтсөк, $\{S_n\}$ удаалаштыктарын пределдери сыяктуу

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha \cdot A_n \pm \beta \cdot B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot A_n \pm \lim_{n\to\infty} \beta \cdot B_n =$$

$= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} A_n \pm \beta \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \alpha \cdot A \pm \beta \cdot B$, чектүү сандардын суммасы (айырмасы) катарында чектүү мааниге ээ болот. Анда (9) катары жыйналуучу болуп, суммасы $\alpha \cdot A \pm \beta \cdot B$ санына барабар болору далилденет.◄

14.3 Теорема. *Эгерде* (1) *катары жыйналуучу болсо, анда анын* a_n *жалпы мүчөсүн предели*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (10)$$

нөлгө умтулат. ***(10) шарты, катардын жыйналуучулугун зарыл шарты деп аталганы менен катардын жыйналуучулугуна кепилдик бербейт, б.а. жетиштүү шарт боло албайт.***

► Айталы (3) шарты аткарылып, (1) катары жыйналуучу же чектүү S суммасына ээ болсун. Берилген катардын a_n жалпы мүчөсүн ($n \geq 2$)

$$a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$$

көрүнүштө жазып, пределге өтсөк

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$ келип чыгып, теорема далилденген болот.◄

14.1.3 Катардын жыйналуучулугунун зарыл жана жетиштүү шарты (Кошинин критерийи)

Жогоруда жыйналуучу катарлардын айрым касиеттерине токтолуп кеттик. Эми кандай учурда катар жыйналуучу болот деген суроого жооп издеп көрөлү. 14.3 – теорема, катар жыйналуучу болгондо сөзсүз (10) зарыл шарты аткарылат деген менен, (10) шарты аткарылса эле, катар жыйналабы же жокпу? – деген суроого жооп бере албайт. Ошондуктан катардын жыйналуучулугуна зарыл жана жетиштүү шарт болгон **Кошинин критерийи** деп аталган теоремага токтололу.

14.4 Теорема. *Берилген* (1) *катардын жыйналуучу болушу үчүн, катардын кайсы бир* N *– мүчөсүнөн баштап, каалаганча сандагы мүчөлөрүнүн суммасын чексиз кичине чоңдук болушу зарыл жана жетиштүү.*

Көрсө, 14.3 – теоремадагыдай катардын бир гана a_n жалпы мүчөсүн чексиз кичине болушун талап кылуу, жыйналуучулукка кепилдик берүүгө жетишсиз болуп, ага кошумча кайсы бир мүчөсүнөн баштап бир эмес, бир канча же каалаганчылык мүчөлөрүнүн суммасын чексиз кичине болушун талап кылуу керек тура.

Кошинин критерийин (14.4 - теоремасын) аралыктардын тилинде төмөндөгүдөй көрүнүштө жазууга болот:

(1) *катарын жыйналуучу болушу үчүн, кандай гана жетишерлик кичине* $\varepsilon > 0$ *санын алсак да, ага ылайыкталган* N_ε *номери (саны) табылып,* (1) *катардын* N_ε *дон чоң номерлер* $(n \geq N_\varepsilon)$ *менен белгиленген каалаганчалык* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *сандагы мүчөлөрүн суммасы*

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+P}| < \varepsilon \qquad (11)$$

шартына баш ийиши зарыл жана жетиштүү (Эгерде p = 0 десек, зарыл шарт жөнүндөгү 14.3 – теорема орун алат).

► **Зарылдыгы:** (11) аткарылса, (1) катарынын жыйналуучу болорун көрсөтөлү.

(1) катарын $m = n + p$ - мүчөсүнө чейинки кошулуучуларын көрсөтүп жазалы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}}_{S_{n-1}} + \underbrace{a_{n=N_\varepsilon} + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+P}}_{(p+1)\ \text{сандагы кошулуучулар}}}_{S_m = S_{N+P}} + \dots .$$

Берилген (1) катарын $(n-1)$ - калдык бөлүгүн ажыратып алалы

$$\sum_{m=n}^{\infty} a_m = \underbrace{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+P}}_{S_{P+1}^{*}\ \text{жекече суммасы}} + \dots . \qquad (12)$$

(11) шарты аткарылгандыктан, (12) катарын жекече суммаларын

$\{S_{P+1}^{*}\}$ удаалаштыгын жалпы мүчөсү

$|S_{P+1}^{*}| = |a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+P}| < \varepsilon$ жетишерлик кичине болуп, удаалаштыктын пределин аныктамасы боюнча

$n \to \infty \Rightarrow \{S_{P+1}^{*}\} \to 0$ чектүү «нөл» пределине умтулат. Анда (12) калдык катары жыйналуучу болуп, 14.1 – теоремасын негизинде (1) – катардын өзү да жыйналуучу болот.

Жетиштүүлүгү: (1) катары жыйналуучу болуп, S суммасына ээ болсо, анда (11) шартын аткарылышын көрсөтөлү.

(1) катардын $m = n + p -$ мүчөсүнө чейинки кошулуучуларын көрсөтүп жазып, (11) шартын $|S_{n+P} - S_{n-1}| < \varepsilon$ көрүнүштө жазууга болоруна ишенебиз. (1) катары жыйналуучу деп алынгандыктан, анын жекече суммаларынан түзүлгөн

$\{S_m\} = \{S_{N+P}\}$, $\{S_{n-1}\}$ удаалаштыктарын бардыгы катардын суммасы болгон бир гана чектүү S пределине умтулушат. Андай болсо,

$\lim\limits_{n\to\infty}|S_{n+P} - S_{n-1}| = S - S = 0$ болуп, $|S_{n+P} - S_{n-1}|$ айырмасы кайсы бир N_ε номеринен баштап, жетишерлик кичине деп алынган каалагандай ε санынан да кичине болору

$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon, n > N_\varepsilon : |S_{n+P} - S_{n-1}| < \varepsilon$ келип чыгып, (11) шарты аткарылат. ◄

Натыйжа. *Эгерде (10) зарыл шарты аткарылбаса, анда катар сөзсүз таралуучу болот. (10) шарты аткарылганы менен Кошинин критерийи аткарылбаса да катар таралуучу болот. Ошентип,*

катардын жыйналуучулугуна Кошинин критерийин аткарылышы гана толук кепилдик берет.

Мисалдар. 4) Кошинин критерийин пайдаланып, гармоникалык катардын таралуучу болорун көрсөткүлө.

►Таралуучу гармоникалык катардын бир гана $a_n = \frac{1}{n}$ жалпы мүчөсү $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ чексиз кичине чоңдук болгону менен, анын кайсы бир $n = N_\varepsilon$ номери менен белгиленген мүчөсүнөн баштап, каалганчалык Р сандагы мүчөлөрүн суммасы чексиз кичине чоңдук боло албайт.

Тескерисинче, гармоникалык катар таралуучу болгонуна карабай, эркин тандалган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына жараша $n = N_\varepsilon$ номери табылып, андан чоң ($n \geq N_\varepsilon$) номерлер менен белгиленген Р +1 сандагы мүчөлөрү (11) шартына баш ийсин деп ойлойлу. (11) барабарсыздыгын сол жагын баалап көрсөк,

$$|a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ \dots + a_{n+P}| = \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ \dots + \frac{1}{n+P}\right| \geq$$

$$\geq \left|\begin{matrix}(\text{P } + 1) \ \textit{сандагы кичине } \frac{1}{n+P} \\ \textit{кошулуучулар менен алмаштырабыз}\end{matrix}\right| \geq \frac{1}{n+P} \cdot (\text{P } + 1) = \frac{\text{P } +1}{n+P}$$ келип чыгат. Каалагандай деп алынган кошулучулардын Р – санын табылган

$n = N_\varepsilon$ номерине (санына) $P = N_\varepsilon$ барабар десек,

$\frac{\text{P } +1}{n+P} = \frac{N_\varepsilon + 1}{N_\varepsilon + N_\varepsilon} = \frac{N_\varepsilon + 1}{2N_\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N_\varepsilon}\right)$ ээ болуп, (11) шарттын аткарылбасын көрөбүз. Анткени $n > N_\varepsilon$ номерлери менен белгиленген

Р +1 сандагы мүчөлөрдүн суммасы жетишерлик чоң $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N_\varepsilon}\right)$ санынан

$|a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ \dots + a_{n+P}| \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N_\varepsilon}\right)$ чоң болору көрүнүп турат (Эң кичине болгондо $\frac{1}{2}$ санына барабар). Бул учурда (11) шарты аткарыла тургандай $\varepsilon -$ саны эркин тандалбастан, ага $\varepsilon > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{N_\varepsilon}\right)$ болсун деген шарт коюлат, б.а. $\forall\varepsilon > 0$ санына ылайык N_ε номери табыла бербейт. Анда Кошинин критерийи аткарылбай, гармоникалык катар таралуучу болот.◄

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}(4\cdot 3^{-n}+8\cdot 5^{1-n})$$ *катарын жыйналуучулугун*

изилдегиле.

► Берилген катардын жалпы мүчөсүн $c_n = 4\cdot\frac{1}{3^n}+8\cdot\frac{1}{5^{n-1}}$ көрүнүштө көчүрүп жазып, катарды эки катардын суммасына

$$4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+8\cdot 5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$$

ажыраталы.

Биринчи кошулуучу катар $q=\frac{1}{3}$, экинчи кошулуучу катар $q=\frac{1}{5}$

болгон 1) – мисалдагы катарга келтирилгенин көрөбүз. Андай болсо, экөөндө тең $|q|<1$ болгондуктан, (4) формуланын негизинде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{q}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

суммаларын эсептеп, берилген катардын $\sum_{n=1}^{\infty}(4\cdot 3^{-n}+8\cdot 5^{1-n})=$ ◄

$=4\cdot\frac{1}{2}+40\cdot\frac{1}{4}=12$ суммасын табабыз.◄

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$$ *катарын жыйналуучулугун изилдегиле.*

► Катардын жыйналуучулугун зарыл шартын аткарылышын текшерип көрөлү. Жалпы $a_n=\frac{n}{2n+1}$ мүчөсүн

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}\neq 0$ предели нөлдөн айырмалуу, анда берилген катар таралуучу болот.◄

$$7)\ -1+0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\frac{\pi}{5}+\ \dots=\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$$ *катарын жыйна –*

луучулугун изилдегиле.

► $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = \cos 0 = 1 \neq 0$ болуп зарыл шарт аткарылбагандыктан, берилген катар таралуучу болот. ◄

8) $1 - 1 + 1 - 1 + \ \dots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ *катарын изилдегиле.*

► $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{эгерде } n+1 - \text{жуп болсо,} \\ 1, & \text{эгерде } n+1 - \text{так болсо} \end{cases}$ болгондуктан, анык бир предели жашабайт. Анда мисалдагы катар таралуучу болот.◄

§14.2 Мүчөлөрү оң болгон катарлардын жыйналуучулук белгилери

14.2.1 Оң катарлардын жыйналуучулук шарттары

Айталы,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}_{S_n} + a_{n+1}}_{S_{n+1}} + \ \dots \qquad (13)$$

катарын бардык мүчөлөрү оң сандар болушсун $\forall n \in N: a_n \geq 0$. Бул учурда оң катардын жекече суммаларын $\{S_n\}$ удаалаштыгы монотондуу өсүүчү болот, анткени ар бир кийинки S_{n+1} жекече суммасына бирден оң a_{n+1} кошулуучусу кошулуп барат $S_{n+1} = S_n + a_n$. Ошондуктан монотонуу удаалаштыктын предели жөнүндөгү Вейерштрасстын теоремасына (1 – бөлүк, 1.1.5) таянып, (13) катарын жыйналуучулугу жөнүндөгү теореманы жазабыз:

14.5 Теорема. *Оң катарлардын жыйналуучу болушу үчүн, анын жекече суммаларынан түзүлгөн $\{S_n\}$ удаалаштыгын чектелген болушу зарыл жана жетиштүү.*

Мисалы, 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ \dots$

катарын жыйналуучулугун изилдегиле.

► Берилген катарды $\alpha -$ көрсөткүчүнө карата үч учурга бөлөбүз:

а) $\alpha > 1$ дейли. Анда 2) – мисалдагы $\forall\, n \in N, n \geq 2:\ \frac{1}{n} > \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x}$ барабарсыздыгын жана $\int_{n-1}^{n} dx = 1$ теңдештигин пайдаланып, $\forall\, k \geq 2$ номерлерине карата түзүлгөн жекече суммалар үчүн

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \int_{n-1}^{n} dx \,<\, 1 + \sum_{n=2}^{k} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \int_{1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_1^k = 1 + \frac{1}{-\alpha+1} \cdot \left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - 1\right) \,<\, 1 + \frac{1}{-\alpha+1} \cdot (-1) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$\left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} < 1 \text{ *таштап жибердик*}\right)$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Мындан $\forall\, k \geq 2$ үчүн $S_k < \frac{\alpha}{\alpha-1}$ болору, же мисалда каралган катардын жекече суммаларынан түзүлгөн $\{S_k\}$ удаалаштыгы жогору жагынан чектелген экендиги келип чыгат. Анда 14.5 – теоремасын негизинде жыйналуучу болот.

б) $\alpha = 1$ болсо, берилген катар гармоникалык катарга айланып, таралуучу болот.

в) $\alpha < 1$ *болсо, жекече сумманы* $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^\alpha} > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > \ln(1+k)$

көрүнүштө салыштырып, анын чектелбегенин көрөбүз. Анткени $\ln(1+k)$ монотондуу өскөндүктөн $k \to \infty \ \Rightarrow\ \ln(1+k) \to \infty$.

Демек $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$ болуп, 14.1 – аныктамасына ылайык катар таралуучу болот.

Берилген мисалдагы катар $\alpha > 1$ болгондо гана жыйналат деген тыянакка келебиз.◄

14.6 Теорема. (салыштыруу белгиси). *Айталы кандайдыр бир N номери табылып,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \forall n: a_n \geq 0\,, \qquad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,, \quad \forall n: b_n \geq 0 \qquad (15)$$

катарларын N *номеринен чоң номерлер менен белгиленген мүчөлөрүнөн баштап* $(n > N)$, $0 \leq a_n \leq b_n$ *барабарсыздыгы аткарылсын. Анда* (15) *катарын жыйналуучу болушунан* (14) *катарынын да жыйналуучу болушу жана* (14) *катарын таралуучу болушунан* (15) *катарынын да таралуучу болушу келип чыгат*.

► Айталы (15) катары жыйналуучу болуп, чектүү B саны анын суммасы болсун, анда анын каалагандай $N -$ калдык бөлүгү да (14.1 – теорема) жыйналуучу болуп, ошол эле B суммасына ээ болот

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \text{B} \;\Rightarrow\; \sum_{n=N}^{\infty} b_n = \text{B}\,.\quad k \geq N \textit{ болгондо теореманын шартында}$$

талап кылынган барабарсыздык орун алгандыктан

$$\sum_{n=N}^{k} a_n \leq \sum_{n=N}^{k} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \textit{ келип чыгып, } \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ калдык бөлүгүнүн}$$

жекече суммаларын өсүүчү (мүчөлөрү оң) удаалаштыгы жогору жагынан чектелген экендигин көрөбүз. Мындан 14.5 – теореманын негизинде

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \textit{ калдык катарын жыйналуучу болору келип чыгат. Анда}$$

14.1 – теоремасына таянып, (14) катарын өзүн да жыйналуучу дейбиз.

Эгерде (14) катары таралуучу болсо деле, (15) катары жыйнала бериши мүмкүн деген тескери ойго келсек, анда кокусунан (15) катары жыйналса, теореманын далилденген бөлүгү боюнча андан кичине болгон (14) катары сөзсүз жыйналышы керек. Бирок, (14) катарын таралуучу деп алганбыз. Мындай карама – каршылык тескери оюбуздун туура эмес экендигин көрсөтүп, теореманын толук далилденгенин билдирет.◄

12. Мисалдар

$$10)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n^4}\quad \textit{катарын жыйналуучулугун изилдегиле.}$$

► Берилген катардын жалпы $a_n = \frac{\cos^2 n}{n^4}$ мүчөсү, $0 \le \frac{\cos^2 n}{n^4} \le \frac{1}{n^4}$ барабарсыздыгына баш ийерин көрөбүз. $b_n = \frac{1}{n^4}$ десек, 9) – мисалда белгиленгендей $\frac{1}{n^\alpha}$ жалпы мүчөсүндө $\alpha = 4 > 1$ болгондуктан,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \textit{ катары жыйналуучу болот. Анда } 14.6 - \textit{теореманын}$$

негизинде, андан кичине болгон берилген катарды жыйналуучу дейбиз.

$$11)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{n}\quad \text{катарын жыйналуучулугун изилдегиле.}$$

► $\lg n$ монотондуу өсүүчү жана ондук логарифмде $n = 10$ болгондо $\lg 10 = 1,$ ал эми $n \ge 11$ болгондо $\lg 11 > 1$ болгондуктан, $n \ge 11$ болгон учурда $\frac{\lg n}{n} > \frac{1}{n}$ барабарсыздыгы орун алат. Анда 14.6 – салыштыруу теоремасы боюнча, берилген катар

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lg n}{n} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ \text{таралуучу гармоникалык катардан}$$

чоң катар катарында таралуучу болот.◄

$$12)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}\quad \textit{катарын жыйналуучулугун изилдегиле.}$$

► Берилген катардын жалпы мүчөсүн салыштырып,

$\frac{1}{2^n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = q^n$ барабарсыздыгы орун аларын көрөбүз. $q = \frac{1}{2} < 1$

$$\text{болгондо } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \textit{ катары жыйналып, анда кичине болгон } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}$$

катары да жыйналуучу болот.◄

$$13)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$$ *катарын карайлы.*

► $\ln n < n$ барабарсыздыгынан $n = 2, 3, \ldots$ болгондо $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ аткарыларын көрөбүз. Ошондуктан берилген катар гармоникалык катардан чоң болуп таралуучу

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n} > \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{болот}.$$

$$14)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$$ *катарын жыйналуучулугун изилдегиле.*

► Бардык оң $x \geq 0$ үчүн $\sin x \leq x$ барабарсыздыгы орун аларын эске алып, берилген катардын жалпы мүчөсүн баалайлы. $n = 1, 2, 3, \ldots$

болгондо $0 < 1-\cos\frac{\pi}{2^n} = 2\,sin^2\frac{\pi}{2\cdot 2^n} \leq 2\left(\frac{\pi}{2\cdot 2^n}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{4^n}$ барабарсыздыгы орун алат. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ катары жыйналгандыктан, берилген катар да жыйналуучу болот. Анткени чектүү $\beta = \frac{\pi^2}{2}$ көбөйтүүчүсү жыйналуучулукка таасирин тийгизбейт (14.2 – теорема). ◄

$$15)\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$$ *катарын изилдегиле.*

►Берилген катарды, таралуучу экендигин белгилүү болгон гармоникалык катар менен салыштыралы.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \quad a_n = \sin\frac{\pi}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{n} \ \text{деп алып,}$$

алардын катышын пределин $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \pi\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} =$

$= \left|\begin{matrix} t = \frac{\pi}{n}\ \text{десек} \\ n\to\infty \Leftrightarrow t\to 0\end{matrix}\right| = \pi\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \pi\cdot 1 = \pi > 1$ табабыз.

Мындан $\frac{a_n}{b_n} > 1 \Leftrightarrow a_n > b_n = \frac{1}{n}$ болору келип чыгып, мисалдагы катар таралуучу гармоникалык катардан да чоң катар катарында таралуучу болот.◄

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ *катарын изилдейли.*

Салыштыруу үчүн жыйналуучу $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *катарын алалы.* Анда

$a_n = \frac{1}{2^n - n}$, $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ деп алып, пределге өтсөк,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1$ ээ болобуз. Мындан

$a_n \sim b_n$ эквиваленттүү же бирдей чоңдуктар экендиги келип чыгып, мисалдагы катардын да жыйналуучу болору далилденет.◄

14.2.2 Даламбердин жана Кошинин жыйналуучулук белгилери

Салыштыруу теоремасына таянып, оң катарлардын жыйналуучулугун аныктоочу жаңы белгилерди келтирип чыгарабыз.

14.7 Теорема (Даламбердин белгиси). *Айталы, берилген (1) катарын бардык мүчөлөрү* $a_n > 0$ *болсун дейли. Эгерде*

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ чектүү предели жашаса, анда: (16)

1) $0 \le q < 1$ *болсо катар жыйналуучу,*

2) ал эми $q > 1$ *болгондо таралуучу болот.*

3) Эгерде $q = 1$ *болуп калса, анда катардын жыйналар – жыйналбасы белгисиз бойдон калып, кошумча изилдөөлөрдү жүргүзүү менен гана жыйналуучу же таралуучу экендиги аныкталат.*

► Айталы (16) предели жашасын, анда предел алдындагы туюнтма кайсы бир жетишерлик чоң N номеринен баштап, пределдин q маанисинен чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланары

$\exists$ N, $n >$ N: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q + \alpha_n$ белгилүү. Мындан $a_{n+1} = q\, a_n + \alpha_n a_n$ ээ болуп, анча чоң эмес экинчи оң кошулуучуну таштап жиберген соң, N ден чоң n дер үчүн $a_{n+1} \le q\, a_n$ барабарсыздыгын алабыз. Алынган барабарсыздыкты N ден чоң болгон номерлер менен жазылган мүчөлөргө улам салыштырып олтуруп,

$$a_{N+1} \le q\, a_N,\ \ a_{N+2} \le a_{N+1}\, q = a_N q^2,\ \ a_{N+3} \le a_{N+2}\, q = a_N q^3, \dots$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз. Аларды мүчөлөп кошуп чыксак,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ \dots\ \le\ a_N\, (q + q^2 + q^3 + \ \dots\ ) \quad (17)$$

сол жагында (1) катарын алгачкы N кошулуучуларын таштап жибергенден кийинки калдык бөлүгү, оң жагында кашаанын ичинде тийиндиси q болгон чексиз геометриялык прогрессия турган барабарсыздыкка ээ болобуз.

Теореманын 1) – шарты боюнча $|q| = q < 1$ болсо, анда (17) нин оң жагында суммасы $a_N \cdot \frac{q}{1-q}$ санына барабар болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия турганын байкайбыз. Анда салыштыруу теоремасын негизинде, барабарсыздыктын сол жагындагы калдык катар да $q < 1$ болгондо жыйналуучу болуп, (1) катарын өзүнүн да жыйналуучулугу далилденет.

2) – шарт аткарылып $q > 1$ болсо, анда жогорудагыдай эле салыштырууларды жүргүзүп, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q + \alpha_n > 1$ же $a_{n+1} > a_n$

барабарсыздыгын алабыз. Мындан $a_{n+1} > a_n > a_{n-1} > \ \dots\ > a_1$ болуп, удаалаштыктын мүчөлөрү улам чоңоюп кете бергендиктен, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ болуп, жыйналуучулуктун зарыл шартын аткарылбайт. Анда катар таралуучу болот.

3) – шарт аткарылып $q = 1$ болсо, $n > \mathrm{N}$ болгондо $a_{n+1} \sim a_n$ тең чоңдуктар болорун көрөбүз. Анда a_N ден кийинки бардык кошулуучулар $a_{N+1} \sim a_{N+2} \sim a_{N+3} \sim \dots$ эквиваленттүү болушу керек. Бул учурда алардын бардыгы тең чексиз (же жетишерлик) кичине чоңдуктар болушса гана, алардын суммасы чексиз кичине болуп, (1) катары жыйналуучу болушу мүмкүн. Эгерде бирөөсү же бир канчасы эле жетишерлик кичине болуп, калганынын жетишерлик кичине болушу күмөндүү болсо, анда (1) катарын жыйналуучулугуна кепилдик берүү татаал. Ошондуктан $q = 1$ болгондо Даламбердин белгиси катардын жыйналуучулугун так жооп бере албай, башка ыкмалар менен кошумча изилдөөлөрдү жүргүзүү зарылчылыгы келип чыгат.

14.8 Теорема (Кошинин белгиси). *Айталы, берилген (1) катарын бардык мүчөлөрү* $a_n > 0$ *болсун жана*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \qquad (18)$$

чектүү предели жашасын, анда:

1) $0 \le \lambda < 1$ *болсо, катар жыйналуучу;*

2) $\lambda > 1$ *болсо, катар таралуучу;*

3) $\lambda = 1$ *болсо катардын жыйналар – жыйналбасы белгисиз*

болот.

► (18) предели жашаса, анда удаалаштыктын пределин аныктамасына ылайык

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, N_\varepsilon,\ n > N_\varepsilon \colon \left|\sqrt[n]{a_n} - \lambda\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \lambda - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \lambda + \varepsilon \qquad (19)$$

шарты аткарылат.

1) $\lambda < 1$ болсун. λ менен 1 санын арасынан q санын эркин тандап ($\lambda < q < 1$), ε санын $\varepsilon = q - \lambda$ деп алсак, q эркин тандалгандыктан жетишерлик кичине ε санын эркин тандоо укугу бузулбайт. Анда (19) дан бардык $n > N_\varepsilon$ номерлери үчүн,

$$\sqrt[n]{a_n} < \lambda + \varepsilon = \lambda + q - \lambda = q \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a_n} < q \ \Rightarrow\ a_n < q^n$$

барабарсыздыгын аткарыларын көрөбүз. Мындан $n > N_\varepsilon$ болгондо (1)

катарын жана $\frac{q}{1-q}$ суммасына ээ болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын калдык катарларына карата

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_n < \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} q^n \quad \text{барабарсыздыктарын аткарыларын}$$

көрөбүз. Демек, салыштыруу теоремасына таянып, жыйналуучу катардан кичине болгон катарды жыйналуучу дейбиз.

2) $\lambda > 1$ болсун. Жогорудагыдай эле талкуулоолорду жүргүзүп, кайсы бир N_ε номеринен баштап, $\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n > 1$ барабарсыздыгы

аткарылгандыктан, зарыл шарт $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ аткарылбай, катар таралуучу болот.

3) $\lambda = 1$ болсун. Анда N_ε номеринен баштап предел алдындагы туюнтма, пределдин мааниси менен $\sqrt[n]{a_n} \sim 1 \Rightarrow a_n \sim 1$ эквиваленттүү болот. Ошондуктан $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ болушу мүмкүн болгондуктан Кошинин белгисине таянып, берилген катардын жыйналуучулугун изилдей албайбыз. ◄

14. Мисалдар

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ катарын жыйналуучулугун изилдегиле.

► $a_n = \frac{n}{4^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{4^{n+1}}$ деп алып, Даламбердин (!6) формуласын пайдаланалы.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{4^{n+1}}}{\frac{n}{4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{n} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4} < 1,$$

$q = \frac{1}{4} < 1$ болгондуктан катар жыйналуучу болот.◄

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ катарын жыйналуучугун текшергиле.

►$a_n = \frac{2^n}{n}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$ ⇨ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} =$

$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 2 > 1$ болгондуктан, катар таралуучу болот.◄

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ катарын жыйналуучулугун изилдегиле.

►$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ⇨ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = 1.$ $q = 1$ болуп, катардын жыйналуучу же таралуучу экендигин тактоо үчүн кошумча изилдөө талап кылынат.

Чынында эле, катардын жыйналуучулугун аныктамасына таянып, берилген катардын жыйналуучулугун далилдөөгө болот. Ал үчүн жалпы мүчөсүн $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ көрүнүштө жазып, катардын $m-$ чи жекече суммасын

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ \dots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}$$

көрүнүшкө келтиребиз. Мындан пределге өтүп,

$S = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) = 1$ мисалдагы катардын чектүү суммага ээ болуп жыйналарын көрөбүз.◄

20) Кошинин (18) белгисин пайдаланып, төмөндөгү катарлардын жыйналуучулугун изилдегиле. ►

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{ln^n(n+1)}$ ⇨ $a_n = \frac{2^n}{ln^n(n+1)}$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{ln^n(n+1)}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln(n+1)} = \frac{2}{\infty} = 0 < 1$, демек катар жыйналат.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ $\Rightarrow$ $a_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2}>1$, катар таралуучу.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ $\Rightarrow a_n=\frac{1}{n^n}$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$.

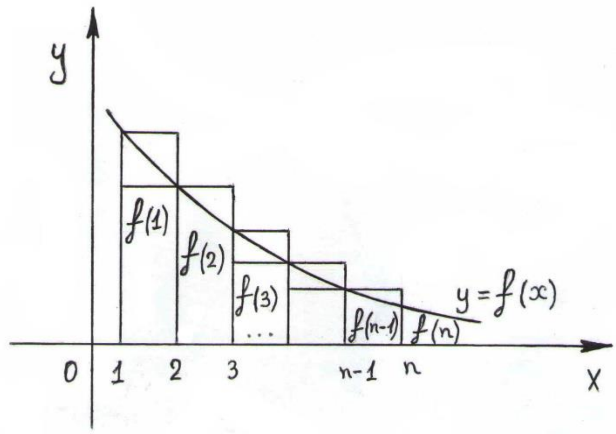
$\lambda=0<1$, анда катар жыйналуучу.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$ $\Rightarrow$ $a_n=\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$; $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3>1$, анда катар таралуучу.

14.2.3 Жыйналуучулуктун интегралдык белгиси

14.9 Теорема. *Айталы,* $x\geq 1$ ($[1,+\infty)$ аралыгында) *шооласында аныкталган жана үзгүлтүксүз* $f(x)$ *оң функциясы өспөөчү болсун. Анда:*



14.1-чийме

1) Эгерде $\int_{1}^{+\infty} f(x)dx$ (20)

өздүк эмес интегралы жыйналса,

$$\text{анда}\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n) \quad (21)$$

сандык катары да жыйналуучу болот.

2) *Эгерде* (20) *өздүк эмес интегралы таралуучу болсо, анда (21) сандык катары да таралуучу болот.*

► Абциссалары $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3, \dots, x_n = n$ чекиттерде $f(n)$ функциясын графигин тургузалы. Бул учурда графикке ичтен жана сырттан сызылган тик бурчтуктардан турган эки баскычтуу фигуралар түзүлөт (14.1 – чийме). Анда төмөн жагынан $y = 0$, жогору жагынан $y = f(x)$ ийриси, каптал жактарынан $x = 1$, $x = n$ түздөрү менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянты

$S = \int_1^n f(x)dx$ анык интегралы менен эсептелерин билебиз.

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сандык катарын $n-$жекече S_n суммасын алалы:

$S_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$. Анда ийри сызыктуу трапецияга сырттан сызылган негизи 1, бийиктиги $f(x_n)$ сандарына барабар тик бурчтуктардын аянттарын суммасын

$S_С = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) = S_{n-1}$, ал эми ичтен сызылган негизи 1, бийиктиги $f(x_n)$ узундуктарына барабар тик бурчтуктардын аянттарын суммасын

$S_И = f(2) + f(3) + \dots + f(n) = S_n - f(1)$ көрүнүштөрдө S_{n-1} жана S_n жекече суммалары менен туюнтууга болот.

Фигуралардын чиймедеги түзүлүү табыятына байкоо салып,

$$S_И < S < S_С \quad \Rightarrow \quad S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_{n-1}$$ барабарсыздыктарына

ээ болобуз. $f(n) > 0$ болгондуктан жекече суммалар монотондуу өсүп,

$$S_{n-1} < S_n \quad \Rightarrow \quad S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_n, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (22)$$

орун алат.

1) Айталы (20) өздүк эмес интегралы жыйналуучу болсун, анда

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \text{А} \quad \text{чектүү предели жашайт.}$$

Шарт боюнча $[1,+\infty)$ аралыгында $f(x) > 0$ болот. Демек, (22) ден

$$\int_1^n f(x)dx \le \text{А} \text{ эске алып, } S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx \le f(1) + \text{А} = \text{К} - const.$$

болорун алабыз. Мындан жекече суммалардын монотондуу өсүүчү $\{S_n\}$ удаалаштыгын бардык мүчөлөрүнүн чектелгендиги келип чыгып, анын (Вейерштрасстын теоремасы боюнча) $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ чектүү предели жашары, б.а. (21) сандык катарын жыйналуучу болору келип чыгат.

2) Айталы (20) өздүк эмес интегралы таралуучу болсун. Анда $x \in [1,+\infty)$ аралыгында $f(x) > 0$, жана

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_1^n f(x)dx = +\infty \quad \text{пределине ээ болот. Экинчи жактан,}$$

$$\text{(22) ден} \quad S_n \ge \int_1^n f(x)dx, n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{болорун байкайбыз. Мындан}$$

(21) сандык катарын $\{S_n\}$ жекече суммаларын удаалаштыгын чектелбегендиги же $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ пределине ээ болору келип чыгат.

Анда (21) катары таралуучу болот.◀

13. Мисалдар

21) Төмөндөгү катарларды интегралдык белгинин жардамы менен изилдегиле. ▶

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}} \text{ катарында } a_n = f(n) = \frac{1}{n^{p}} \sim f(x) = \frac{1}{x^p} \Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{dx}{x^p} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^n\right) = \frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty}\left(n^{1-p} - 1\right) =$$

$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, \text{эгерде } p > 1 \text{ болсо;} \\ +\infty, \text{ эгерде } p \le 1 \text{ болсо} \end{cases}$ көрүнүштө эсептелет. Демек, берилген катар $p > 1$ болгондо жыйналуучу, $p \le 1$ болгондо таралуучу болот. Мисалдагы катар $p = 1$ болгондо гармоникалык катарга айланат.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ катарында $a_n = f(n) = \frac{1}{n^2+1} \sim f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\int_1^n\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{n\to+\infty}(arctg\, n - arctg\, 1) =$$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ болуп, берилген катар жыйналуучу болот.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ катарында $a_n = f(n) = \frac{n}{n^2+1} \sim f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\int_1^n\frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}[\ln(n^2+1) - \ln 2] = +\infty,$$

анда катар таралат.

г) $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\cdot ln^2(n-2)}$ катарында $a_n = f(n) = \frac{1}{(n-2)\cdot ln^2(n-2)} \sim$

$$\sim f(x) = \frac{1}{(x-2)\cdot ln^2(x-2)} \Rightarrow \int_4^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)\cdot ln^2(x-2)} = \left|\begin{matrix} x \ge 4 \text{ деп} \\ \text{эсептейбиз}\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_4^n\frac{dx}{(x-2)\cdot ln^2(x-2)} = \lim_{n\to+\infty}\int_4^n\frac{d|ln(x-2)|}{ln^2(x-2)} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{ln(x-2)}\right)\Bigg|_4^n$$

$= \frac{1}{ln2}$, анда $\int_4^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)\cdot ln^2(x-2)}$ өздүк эмес интегралы жыйналып, берилген сандык катардын да жыйналуучулугу келип чыгат.◄

Жыйналуучу катарлардын R_n калдык бөлүгү чексиз кичине чоңдук болуп, катардын $S-$ суммасы менен S_n- жекече суммасын айырмасына барабар $R_n = S - S_n$ (6 – формуланы кара). Ошондуктан,

көптөгөн практикалык маселелерге байланышкан катарлардын жыйналуучулугун изилдөөдө, алардын калдык бөлүктөрүн баалоо ыкмалары колдонулат. Калдык бөлүктөрүн изилдөөдө катарлардын жыйналуучулугун интегралдык белгиси кеңири колдонулат.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \text{сандык катары жыйналуучу болуп}, S \text{ суммасына}$$

ээ болсун, ал эми $f(x)$ функциясы 14.9 – теореманын шарттарына толук баш ийсин, анда

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx - \text{өздүк эмес интегралын да жыйналуучу}$$

болорун көрсөтүүгө болот.

Бул учурда, $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$ барабарсыздыгын пайдаланып R_n

калдык бөлүгүн баалап көрсөк:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ келип чыгат.}$$

Мындан $0 < R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$ (23)

жыйналуучу сандык катардын калдык бөлүгүн баалоочу (23) формуласына ээ болобуз.

Мисалы, 22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)^2}$ катарын жыйналуучулугун изилдеп,

анын $S -$ суммасы менен $S_5 -$ жекече суммасын арасындагы каталык айырмасын эсептегиле.

► Берилген катардын жалпы $a_n = f(n) = \frac{n}{(n^2+1)^2}$ мүчөсүн 14.9 – теоремасын шарттарын канааттандырган $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ функциясы менен алмаштырып, өздүк эмес интегралын эсептесек:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x^2+1}\Big|_1^b\right] = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{b^2+1}\right) = \frac{1}{4}$ ээ болобуз. Анда интегралдык белги боюнча берилген сандык катар жыйналуучу болуп, анын 5 кошулуучсунан кийинки мүчөлөрүн таштап жиберсек, (23) формуласы боюнча кетирилген айырма каталык

$$R_n \leq \int_5^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{x^2+1}\Big|_5^{+\infty} = \frac{1}{52} \approx 0{,}019231 \text{ болот.}$$

Эгерде ушундай каталык практикалык эсептөөгө олуттуу таасирин тийгизбесе, анда берилген катардын $S-$ суммасын жакындаштырып, алгачкы 5 мүчөлөрүн суммасы менен

$$S \approx S_5 = \frac{1}{4} + \frac{2}{25} + \frac{3}{100} + \frac{4}{289} + \frac{5}{676} = 0{,}25 + 0{,}08 + 0{,}03 +$$

$+0{,}019231 + 0{,}007396 = 0{,}381237$ алмаштыра алабыз. ◄

§ 14.3 Белгиси өзгөрүлмө катарлар

14.3.1 Белгиси кезектешме катарлар. Лейбництин белгиси

Жогоруда мүчөлөрү оң сандар болгон катарлардын жыйналуучулук белгилерин карадык. Кийинки кадамда белгиси

кезектешме

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \ \ldots \qquad (24)$$

катарын карайлы. Мында $a_n > 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Белгиси кезектешме катарлардын жыйналуучулугун жетиштүү шарты – Лейбництин белгиси деп аталган төмөндөгү теорема менен берилет:

14.10 Теорема (Лейбництин белгиси). *Эгерде белгиси кезектешме (24) катардын мүчөлөрүнүн* $a_n -$ *абсолюттук чоңдуктары: 1) монотондуу кемүүчү;*

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = 0$ *нөлгө умтулган* $\{a_n\}$ *удаалаштыгын түзсө,*

анда (24) катары жыйналуучу болот.

► (24) катарын жуп сандагы мүчөлөрүн суммасынан турган

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$ жекече суммасын алсак, анда теореманын 1) – шарты боюнча $a_{2n-1} \geq a_{2n}$ кемүүчү болуп, ар бир кашаанын ичинде оң сандар тургандыктан, оң сандардын суммаларынан турган $\{S_{2n}\}$ удаалаштыгы монотондуу өсүүчү болот.

S_{2n} жекече суммасын экинчи бир көрүнүштө өзгөртүп жазалы

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$. Мында оң жактагы ар бир кашаада оң сандар турганы менен, алдындагы “минус” белгиси, аларды a_1 санынан кемүүчүлөргө айлантат. Ошондуктан кемүүчүлөрдү таштап жиберсек, оң жагы чоңоюп S_{2n} жекече суммасы жогору жагынан a_1 саны менен чектелип турарын көрөбүз $S_{2n} < a_1$.

Анда монотондуу удаалаштыктардын предели жөнүндөгү Вейерштрасстын теоремасы боюнча $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$, чектүү пределге ээ болот.

Эгерде (24) катарын так сандагы мүчөлөрүн суммаларынан турган жекече суммасын алсак, анда $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ болуп, пределге өтсөк, 2) – шарттын негизинде

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = S + \underbrace{0}_{2)-\text{шарт}} = S$ ээ болобуз. Ошентип, (24) катарын кандай жекече суммаларын удаалаштыктарын түзсөк да,

алардын бардыгы бир эле S пределине умтулушат. Мындан (24) катарын чектүү S суммасы жашап, жыйналуучу болору келип чыгат.◄

23) Төмөндөгү белгиси кезектешме катарлардын жыйналуучулугун Лейбництин белгиси менен изилдегиле. ►

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots+\ \frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ \dots$ катарын карайлы,

$\Rightarrow\ |a_n|=\frac{1}{n}$ болуп, $|a_n|>|a_{n+1}|$ же $\{|a_n|\}-$ удаалаштыгы

$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ \dots\ >\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\ \dots$ монотондуу кемип, Лейбництин 1) – шарты аткарылат.

Ошондой эле $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ болуп, 2) – шарт да аткарылат. Анда Лейбництин белгиси боюнча мисалда берилген белгиси кезектешме катар жыйналуучу болот.◄

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}\ \Rightarrow\ a_n=\frac{1}{\ln n}\ \Rightarrow\{|a_n|\}:\ \ \frac{1}{\ln 2}>\ \dots>\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{\ln(n+1)}>\ \dots$

монотондуу кемүүчү жана $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}=0$. Демек белгиси кезектешме катар жыйналат.◄

14.3.2 Мүчөлөрү эркин белгиге ээ болгон катарлар. Абсолюттук жана шарттуу жыйналуучулук

Айталы, мүчөлөрү каалагандай эркин белгилерге ээ болгон

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ a_3+\dots+\ a_n+\ \dots \qquad (25)$$

катары берилсин. Мындай катарлардын жыйналуучулугун аныктоо опурталуу болуп, көптөгөн ыңгайсыздыктарды жаратат. Анткени мүчөлөрү ой келди белгиге ээ боло бергендиктен, жекече суммалардын удаалаштыгын табыятын түшүнүү кыйын. Ошондуктан белгиси

өзгөрүлмө катарлар менен, алардын мүчөлөрүн абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн оң катарларды кошо карашат. Мүчөлөрү

эркин белгиге ээ болгон катарларга мисал катары эки башка

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ \dots$ жана

$\sin 1+\sin 2+\ \dots\ +\sin n+\ \dots$ катарларын келтирүүгө болот.

14.2 Аныктама.

$$\text{Эгерде } \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1|+|a_2|+\ |a_3|+\dots+\ |a_n|+\ \dots \qquad (26)$$

катары жыйналуучу болсо, анда (25) катары ***абсолюттук жыйналуучу*** *катар деп аталат. Ал эми (26) катар жыйналбаганы менен (25) катары жыйналуучу болуп калса, анда (25) катарын* ***шарттуу жыйналуучу*** *деп атайбыз.*

14.10 Теорема. *Эгерде (26) катар жыйналуучу болсо, анда (25) катары да жыйналып, абсолюттук жыйналуучу катар деп аталат.*

► (25) катардын $n-$ жекече суммасы $S_n=a_1+a_2+\ a_3+\dots+\ a_n$,

ал эми (26) катардын $n-$ жекече суммасы

$S_{|n|}=|a_1|+|a_2|+\ |a_3|+\dots+\ |a_n|$ болсун.

Теореманын шарты боюнча (26) оң катары жыйналуучу, анда жекече суммалардын $\{S_{|n|}\}$ монотондуу өсүүчү удаалаштыгы чектүү

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_{|n|}=S^*$ пределине ээ болот жана удаалаштыктын $\forall n$ номери менен белгиленген мүчөлөрү кемибөөчү болгондуктан, $S_{|n|}\le S^*$ барабарсыздыгына баш ийишет.

Кийинки кадамда мүчөлөрү эркин белгиде болгон (25) катарын алгачкы n кошулуучуларын арасынан терс жана оң белгидегилерин өз – өзүнчө ажыртып жазып, терс мүчөлөрүн суммасын S_n^- , ал эми оң белгидеги мүчөлөрүн суммасын S_n^+ деп белгилейли. Анда (25) катардын $n-$ жекече суммасын $S_n=S_n^+-S_n^-$, ал эми (26) катардын $S_{|n|}=S_n^++S_n^-$ көрүнүштөрдө жазууга боло турганын көрөбүз.

Демек $\{S_n^-\}$, $\{S_n^+\}$ удаалаштыктары кемибөөчү жана жогору жагынан $S_n^+ \leq S_{|n|} \leq S^*$, $S_n^- \leq S_{|n|} \leq S^*$ саны менен чектелишкен, анда монотондуу удаалаштыктардын предели жөнүндөгү Вейерштрасстын теоремасын негизинде чектүү пределге ээ болушат:

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^- = S^-$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^+ = S^+$. Мындан (25) катардын жекече суммаларын удаалаштыгын да

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(S_n^+ - S_n^-) = S^+ - S^- = S$ чектүү предели жашап, катардын суммасын S санына барабар болушу же жыйналуучу экендиги келип чыгат.◀

Бирок, (25) катардын жыйналуучу болушунан, (26) катардын сөзсүз жыйналуучулугу келип чыкпайт. Бул учурда (26) катарын жыйналуучу же таралуучу болушу өзүнчө изилденет.

Мисалы, белгиси кезектешме $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ катары, Лейбництин

белгиси боюнча жыйналуучу болгону менен, абсолюттук жыйналуучу боло албайт, б.а. шарттуу жыйналуучу болот. Ал эми 21) , а) –

мисалында берилген $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\mathrm{p}}}$ катары $\mathrm{p} > 1$ болгондо

абсолюттук жыйналуучу, $0 < \mathrm{p} \leq 1$ болгондо шарттуу жыйналуучу болот.

Натыйжа. Эгерде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ катары жыйналса, анда $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$

барабрсыздыгы орун алат.

14.11 Теорема. *Эгерде катар шарттуу жыйналуучу болсо, анда мүчөлөрүн орундарын алмаштырып олтуруп, катардын суммасын, алдын ала тандалып алынган А санына барбар боло тургандай абалда жазууга болот.*

Теореманы далилдөөсүз кабыл алып, анын тууралыгын мисал менен көрсөтөлү: ►Белгиси кезектешме шарттуу жыйналуучу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots +\ \frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ \dots\ = \mathrm{S}$$

катардын суммасын S саны деп алып, анын мүчөлөрүн орундарын алмаштырып олтуруп суммасын $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{S}$ санына барбар боло тургандай жаза аларыбызды көрсөтөлү. Ал үчүн кошулуучуларды ар бир оң белгидеги мүчөдөн кийин, катары менен эки терс белгидеги мүчөлөр жазыла тургандай абалда алмаштырып жазабыз

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ \dots\ . \quad (*)$$

Мүчөлөрүн орундары алмашкан (∗) катарын үчкө эселүү орундар боюнча жекече суммаларын $\{\bar{\mathrm{S}}_{3k}\}$ удаалаштыгын түзөлү:

$\bar{\mathrm{S}}_3 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right),$

$\bar{\mathrm{S}}_6 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\bar{\mathrm{S}}_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right),$

$\bar{\mathrm{S}}_9 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\bar{\mathrm{S}}_6+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right),$

. . . .

Удаалаштыктын кийинки мүчөлөрүн улантып жазып, кашаанын ичинде мисалда берилген белгиси кезектешме катар турганын көрөбүз. Анда удаалаштыктын предели $\lim\limits_{n\to+\infty}\bar{\mathrm{S}}_{3k}=\frac{1}{2}\mathrm{S}$ санына барбар болот. Үчкө эселүү болбогон орундар боюнча жекече суммалардын

$\bar{\mathrm{S}}_{3k+1}=\bar{\mathrm{S}}_{3k}-\frac{1}{4k-2},\quad \bar{\mathrm{S}}_{3k+2}=\bar{\mathrm{S}}_{3k}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}$ экөөсүн тең $\bar{\mathrm{S}}_{3k}$ жекече суммасы менен туюнтуп, пределдерин эсептесек

$\lim\limits_{n\to+\infty}\bar{\mathrm{S}}_{3k+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\bar{\mathrm{S}}_{3k}-\frac{1}{4k-2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{S}-0=\frac{1}{2}\mathrm{S},$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \bar{S}_{3k+2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\bar{S}_{3k} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}S - 0 - 0 = \frac{1}{2}S$, ошол эле $\frac{1}{2}S$ маанисине ээ болобуз. Демек, $(*)$ катарынын кайсыл орундар боюнча түзүлгөн жекчече суммаларын $\{\bar{S}_k\}$ удаалаштыгын алсак да, алардын бардыгы $\frac{1}{2}S$ санына умтулушат. Анда $(*)$ катарын суммасы $\frac{1}{2}S$ саны болору далилденген болот. ◄

Эскертүү. *Абсолюттук жыйналуучу катарлар үчүн 14.11 – теоремасы аткарылбайт. Анткени жыйналуучу катардын суммасы бирөө гана болот.*

14.12 Теорема (Дирихле – Абелдин белгиси).

Айталы, мүчөлөрү эркин белгиге ээ болгон

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ катары берилсин.} \qquad (27)$$

Эгерде : 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ катарын жекече суммаларын *удаалаштыгы чектелген болсо,*

2) $\{b_n\}$ *удаалаштыгы өспөөчү жана чексиз кичине* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ *болсо,*

анда (27) катары жыйналуучу болот.

Дирихле – Абелдин белгиси, Лейбництин белгисин жалпылоочу теорема болот. Анткени, $a_n = (-1)^{n-1}$ болгон жеке учурда Лейбництин белгиси келип чыгат. Теореманы далилдөөсүз кабыл алып, аны практикалык эсептөөдө колдонуп көрөлү.

24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$, $0 < \alpha < 2\pi$ катарын жыйналуучулугун изилде.

► $a_n = \sin n\alpha$, $b_n = \frac{1}{n}$ деп алып,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha \quad \text{катарын жекече суммаларын эсептесек}$$

$$S_n = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ \dots + \sin n\alpha = \left| \begin{matrix} \text{ар бир кошулуучуга} \\ 2\sin\frac{\alpha}{2} \ \text{көбөйтүп,} \\ \text{бөлөлү} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha + \ \dots + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha\right] =$$

$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left\{\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2}\right] + \left[\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{5\alpha}{2}\right] + \ \dots + \left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha - \right.\right.$
$\left.\left. -\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]\right\} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]$ чектүү маанисин табабыз (кашааларды ачып жоюштурдук). Анткени, синус жана косинус “-1" менен "$+1$" дин арасындагы сандар болушат. Демек Дирихле – Абелдин теоремасын 1) – шарты аткарылат.

Экинчи жактан, $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ удаалаштыгы өспөөчү (кемүүчү) жана $b_n = \frac{1}{n}$ чексиз кичине $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ чоңдук болуп, теореманын 2) – шарты да аткарылат. Анда берилген катар жыйналуучу болот.

§ 14.4 Функционалдык катарлар

14.4.1 Функционалдык катарлардын жыйналуу областы

Мүчөлөрү кайсы бир А көптүгүндө аныкталаган $f_n(x)$ функциялары болгон ($n = 1, 2, \ 3, \dots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ \dots + f_n(x) + \ \dots \qquad (28)$$

катарды, функционалдык катар деп айтабыз. А көптүгүн кыймылы токтотулган (фиксирленген) конкреттүү бир x_0 чекитинде, (28) функционалдык катары кадимки эле

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \ \dots + f_n(x_0) + \ \dots$$

сандык катарга айланып, айрым бир x_0 чекиттеринде жыйналуучу, кайсы бир x_0 чекиттеринде таралуучу болот. Функционалдык катар

жыйналуучу болгон x чекиттерин X көптүгүн, анын жыйналуу

областы деп айтабыз. Мисалы $1 + x + x^2 + x^3 + \ ... + x^n + \ ...$

катарында $\forall\, n$: $f_n(x) = x^n$ функциясы, $A =]-\infty, +\infty[$ интервалында аныкталганы менен, катар $|q| = |x| < 1$ шарты аткарылганда гана чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия катарында жыйналып, жыйналуу областы $X = \{x\ |x \in R, -1 < x < 1\}$ көптүгү болот.

Ошондой эле, (28) катарын мүчөлөрүн абсолюттук чоңдуктарынан турган

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = |f_1(x)| + |f_2(x)| + |f_3(x)| + \ ... + |f_n(x)| + \ ... \qquad (29)$$

катары X областында жыйналуучу болсо, анда (28) катарын X областында абсолюттук жыйналуучу катар дейбиз.

Эгерде функционалдык катар X областында жыйналуучу болсо, анда катардын суммасы X областында аныкталган $S(x)$ функциясы болот. Каралган мисалдагы катардын суммасы $X =]-1,\ 1[$

аралыгында аныкталган $1 + x + x^2 + x^3 + \ ... + x^n + \ ... = \frac{1}{1-x} = S(x)$ функциясы болот.

Функционалдык катардын суммасы $S(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$

пределин мааниси менен аныкталып, n −жекече сумма

$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ ... + f_n(x)$ көрүнүштөгү функция, ал эми жекече суммалардын удаалаштыгы функциялардын

$$\{S_n(x)\}: \quad S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x),\ \dots,\ S_n(x), \dots, \qquad (30)$$

удаалаштыгы катарында жазылат.

Айрым функционалдык катарлардын жыйналуу областтарын, оң сандык катарлардын жыйналуучулугуна жетиштүү шарттар болгон Даламбердин, Кошинин ж.б. белгилердин жардамы менен эле аныктоого болот. Мисалы:

25) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lg x}}$ катарын жыйналуу областын, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\mathrm{p}}}$ сандык

катарындай аныктайбыз. Ошондуктан $\mathrm{p}=\lg x>1$ же $x>10$ болгондо жыйналат, ал эми $\mathrm{p}=\lg x\leq 1$ же $0<x\leq 10$ болгондо таралуучу, б.а. жыйналуу областы $\mathrm{X}=\{x\mid x\in R, 10<x<+\infty\}$ шооласы болот.

26) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(1+x^2)^n}$ катарын Кошинин белгиси менен изилде.

► Жалпы мүчөсү $f_n(x)=\frac{n^n}{(1+x^2)^n}$, $\mathrm{A}=]-\infty,+\infty[$ – бүтүндөй сан огунда аныкталган оң функция болот. Анда $\forall\, x\in \mathrm{A}\equiv R$:

$\lambda=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{(1+x^2)^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{1+x^2}=+\infty$ келип чыгат. Ошондуктан мисалдагы катар өзүнүн $\mathrm{A}=]-\infty,+\infty[$ – аныкталуу областында таралуучу болот, б.а. жыйналуу чеккиттери жок.◄

27) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\,e^{nx}$ катарын жыйналуу областын тапкыла.

►Анын абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн катар

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}n\,e^{nx}|=\sum_{n=1}^{\infty}n\,e^{nx}\ ,\forall\, x\in R$$

оң болот. Ага Даламбердин белгисин колдонсок,

$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{(n+1)\,e^{(n+1)x}}{n\,e^{nx}}=\frac{(n+1)\,e^{x}}{n}\ \Rightarrow\ q=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,e^{x}}{n}=e^x$ келип чыгат. $e^x<1\ \Rightarrow\ x<\ln 1=0$ болуп, катар $-\infty<x<0=]-\infty,\ 0[$

интервалында абсолюттук жыйналуучу болот. Ал эми $x\geq 0$ чекиттеринде таралат.◄

Адатта (28) функционалдык катарын жыйналуучулук шарттарын, анын калдык бөлүгүн изилдөө менен аныкташат.

14.1.2 – темадагы (6) формулага таянып, X областында жыйналуучу болгон учурда (28) катарын калдык бөлүгүн

$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ көрүнүштө жазабыз. Мындан (28) дин $S(x)$ суммасын, эки: чектүү жана калдык кошуулучулардан турган чексиз

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x) = \underbrace{f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x)}_{S_n(x)} +$$

$$+\underbrace{f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \ldots}_{R_n(x)}$$ бөлүктөргө ажыратуу мүмкүнчүлүгүн алабыз. Ошентип (28) жыйналса, функционалдык катардын $n-$ калдык бөлүгү X областындагы $\forall x \in$ X чекиттерде

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \ldots ,$$

жыйналуучу калдык катар болот же

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = \lim_{n\to+\infty} [S(x) - S_n(x)\,] = 0 \qquad (31)$$

чексиз кичине суммага, б.а. нөл пределине ээ.

14.4.2 Бир калыпта жыйналуучулук

(28) функционалдык катарды X областында жыйналуучу болот дегенибиз менен, X областын кайсы бир x_0 чекиттеринде $S(x_0)-$ суммасына ылдамыраак, дагы башка бир x_1 чекиттеринде $S(x_1)-$ суммасына жайыраак жыйналышы мүмкүн. Ошондуктан $S(x)$ суммасына, катардын X көптүгүнүн ар бир x чекиттериндеги жыйналуу ылдамдыктарына көңүл бурабыз.

14.3 Аныктама. *Эгерде жетишерлик кичине деп эсептелген* $\forall\varepsilon > 0$ *санына жараша, кандайдыр бир* N_ε *номери (саны) табылып,* X *көптүгүн* (X ⊂ A) *бардык* x *чекиттеринде,* N_ε *номеринен чоң номерлер* $(n > N_\varepsilon)$ *менен белгиленген* (30) *удаалаштыгын мүчөлөрү,*

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon \qquad (31)^{A}$$

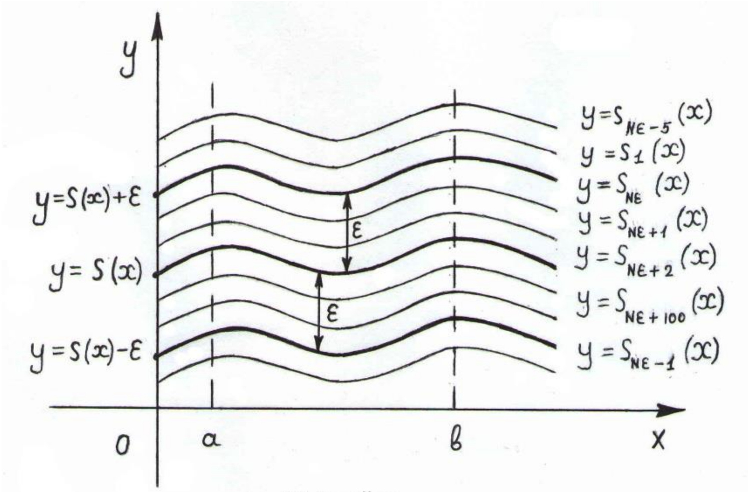
шартын канааттандырса, анда (28) катарын X *көптүгүндө* $S(x)$ *функциясына бир калыпта жыйналат дейбиз.*

Бир калыпта жыйналуучулукту геометриялык жактан, кайсы бир N_ε номеринен баштап (30) удаалаштыгын

$S_{N_\varepsilon+1}(x),\ S_{N_\varepsilon+2}(x),\ S_{N_\varepsilon+3}(x),\ \dots$ чексизге чейинки бардык мүчөлөрү болгон функциялардын графиктери менен, $y = S(x)$ функциясын графигинин арасындагы аралыктар жетишерлик кичине деп алынган ε аралыгынан кыска болот же $y = S(x)$ тин $\varepsilon -$ тилкесинин ичинде жайгашат, б.а.

$n > N_\varepsilon \ \Rightarrow\ S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon$ (14.2 – чийме). Бул учурда, (30) удаалаштыгын чектүү N_ε сандагы

$S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x),\ \dots,\ S_{N_\varepsilon}(x)$ мүчөлөрүн гана графиктери, $y = S(x)$ функциясын графигинин $\varepsilon -$ тилкесин сыртында калат.



14.2-чийме

Физикалык жактан X көптүгүндө бир калыпта жыйналуучулукту, анын ар бир x чекиттерин кайсыл жерде жайгашканынан көз каранды болбостон, жекече суммалардын (30) удаалаштыгы же (28) катары, $S(x)$ функциясына бирдей $\varepsilon -$масштабы менен ченелген ылдамдык менен умтулат деп түшүнөбүз.

Ошентип, (28) катарынын X көптүгүндө бир калыпта жыйналуучулугу, (30) жекече суммалардын $\{S_n(x)\}$ удаалаштыгынчн X көптүгүндө бир калыпта жыйналуучулугунан келип чыгат. Мисалдар.

28) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2} + n}$ функционалдык катарын $[-1, 1]$ кесиндисинде

бир калыпта жыйналуучу болорун далилдегиле.

► Берилген катар белгиси кезектешме катар болуп, $\mathrm{A} = [-1, 1]$ аныкталуу областында берилген $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2} + n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$ функциялары Лейбництин белгисин шарттарын канааттандырып, шарттуу жыйналуучу болот. Айталы $S(x)$ ушул катардын суммасы, ал

эми $R_n(x)$ анын $n-$калдык бөлүгү болсун. Анда катардын калдык бөлүгү

$$R_n(x) = (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+1} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+3} - \ \dots \quad \right]$$

көрүнүштө болуп, анын абсолюттук чоңдугу биринчи

кошулуучусунан ашып кетпейт $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+1}$. Анткени жыйналуучу катардын калдык бөлүгү чексиз кичине чоңдук болот жана Лейбництин белгиси боюнча $\forall\, x \in [-1, 1] : f_n(x)$ улам кемип баргандыктан, калдык мүчөлөрдүн эң чоңу деп, биринчи $f_{n+1}(x) -$ кошулуучусун алууга болот. Ошондой эле бардык $n = 1, 2, 3, \ \dots$ үчүн:

$$\forall\, x \in [-1, 1]: \ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+1} < \frac{1}{n} \ \Rightarrow |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{n}$$

барабарсыздыгы аткарылат. Анткени бөлүмүндөгү $\sqrt{1-x^2}+1$ оң санын таштап жиберсек бөлчөк чоңоёт.

Мындан жетишерлик кичине деп эсептелген кандай гана $\varepsilon > 0$ санын алсак да $\frac{1}{n} < \varepsilon$ шартын аткарылышынан, $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ шартынын аткарылышы келип чыгарын көрөбүз. Демек, $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ болуп, алынган ε санына жараша $N_\varepsilon = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ –“бүтүн бөлүгү” деп алынган, $[-1, 1]$ аралыгындагы бардык x тер үчүн жарактуу же универсалдуу N_ε номери (саны) табылып, $(31)^{\mathrm{A}}$ шарты аткарылат. Анда 14.3 – аныктамасына ылайык, берилген катар $[-1, 1]$ аралыгында $S(x)$ функциясына бир калыпта жыйналат.◄

$$29)\ 1 + (x-1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ \dots \ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n-1})$$

$0 \leq x \leq 1$ аралыгында бир калыпта жыйналбай турганын далилдегиле.

► Берилген катардын $n-$ жекече суммасын

$S_n(x) = \begin{cases} x^n, \ \text{эгерде } 0 \leq x < 1 \text{ болсо,} \\ \ 1, \ \text{эгерде } x = 1 \text{ болсо} \end{cases}$ көрүнүштө эсептеп чыгууга болот. Мындан пределге өтүп,

$S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ эгерде } 0 \le x < 1 \text{ болсо}, \\ 1, \text{ эгерде } x = 1 \text{ болсо} \end{cases}$ катардын суммасын табабыз. Анда катардын калдык бөлүгүн абсолюттук чоңдугун

$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \begin{cases} x^n, \text{ эгерде } 0 \le x < 1 \text{ болсо}, \\ 0, \text{ эгерде } x = 1 \text{ болсо} \end{cases}$ көрүнүштө эсептөөгө болот.

$0 < x < 1$ учурунда, эркин тандалуучу $\varepsilon > 0$ санын $0 < \varepsilon < 1$ боло тургандай алып, $|S(x) - S_n(x)| \le x^n < \varepsilon$ шарты аткарылсын дейли. Анда $x^n < \varepsilon$ барабарсыздыгын n ге карата чыгарып, $n \ln x < \ln \varepsilon \;\Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$

барбарсыздыгына ээ болобуз. Анткени $0 < x < 1$ болгондо $\ln x < 0$ терс белгиде болуп, ага бөлгөндө барабарсыздыктын белгиси алмашат. Демек, алынган ε го ылайыкташкан N_ε номери

$N_\varepsilon = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] = N_\varepsilon(x)$ көрүнүштө табылып, табылган N_ε номерин $0 < x < 1$ аралыгындагы бардык x тер үчүн жарактуу эмес экендигин байкайбыз. Анткени x өзгөрүлмөсү 1 ге чексиз жакындап

Барганда, $N_\varepsilon(x)$ номери $\lim\limits_{x\to1} N_\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to1}\left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] = \left[\frac{\ln \varepsilon}{0}\right] = +\infty$ умтулуп, тандалган ε го жараша берилген $0 \le x \le 1$ аралыгындагы бардык x тер үчүн, $n > N_\varepsilon$ болгондо $|S(x) - S_n(x)| \le x^n < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай универсалдуу N_ε номери жашабай турганын, б.а. бир калыпта жыйналуучулуктун аныктамасын аткарылбасын көрөбүз. Анда катар берилген аралыкта бир калыпта жыйналуучу боло албайт.

Эгерде кандайдыр бир жетишерлик кичине $\delta > 0$ санын алып, каралган мисалдагы $0 \le x \le 1$ аралыгын $0 \le x \le 1 - \delta$ аралыгы менен алмаштырсак, анда берилген катар $[0, 1 - \delta]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болот. Анткени, бул учурда аралыктагы бардык x тер үчүн жарактуу же андан көз каранды болбогон N_ε номерин

$N_\varepsilon = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] \le \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1-\delta)}\right]$ - “бүтүн бөлүгү” көрүнүштө тандай алабыз. ◄

14.4.3 Вейерштрасстын бир калыпта жыйналуучулук белгиси

Функционалдык катарлардын бир калыпта жыйналуучулугуна кепилдик берген жетишерлик шарт, Вейерштрасстын теоремасы менен берилет.

14.13 Теорема (Вейерштрасстын белгиси). *Эгерде X көптүгүн бардык x чекиттеринде,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \quad (32)$$

функционалдык катарынын ар бир $f_n(x)$ мүчөлөрүн абсолюттук чоңдуктары, мүчөлөрү оң болгон

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots \quad (33)$$

сандык катардын тиешелүү мүчөлөрүнөн ашып кетишпесе

$$|f_n(x)| \le a_n, n = 1, 2, 3, \ldots. , \quad (34)$$

анда (32) *функционалдык катар, X көптүгүндө абсолюттук жана бир калыпта жыйналуучу болот.*

Теореманын шарттары аткарылган учурда (33) катарды, (32) катардын можаранттык (туураган) катары деп атайбыз.

► Теореманын шарты боюнча (32) катардын мүчөлөрү $\forall x \in X$ көптүгүндө (34) шартын канааттандырат, анда оң катарларды салыштыруу теоремасы боюнча

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ аткарылып, (33) катары жыйналгандыктан,}$$

андан кичине болгон (32) катары абсолюттук жыйналуучу болот.

Айталы, (32) катардын суммасы $S(x)$, $n -$ жекече суммасы

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots + f_n(x),$$

ал эми (33) сандык катардын суммасы σ , $n -$ жекече суммасы

$\sigma_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ болсун. анда $\forall x \in$X :

$$|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \dots| \le$$

$$\le |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + |f_{n+3}(x)| + \dots \le a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots <$$

$$< \sigma - \sigma_n$$

барабарсыздыгы аткарылат. (33) жыйналгандыктан, анын калдык

бөлүгү $R_n = \sigma - \sigma_n \to 0$ чексиз кичине чоңдук болот. Демек эркин тандалган жетишерлик кичине ε санын, $\varepsilon > \sigma - \sigma_n$ боло тургандай тандоого болот, анткени кандай гана жетишерлик кичине оң сан алсак да, ал чексиз кичине болгон $\sigma - \sigma_n$ айырмасынан чоң болот. Анда жогорудагыдай тандалган ε санына жараша, X көптүгүндөгү бардык x терден көз каранды болбогон универсалдуу N_ε номери табылып, $n > N_\varepsilon$ болгон n номерлери менен белгиленген мүчөлөр $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ шартына баш ийип, 14.3 – аныктамасы боюнча X көптүгүндө бир калыпта жыйналуучу болот.◄

Мисалы, 30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ катарын бир калыпта жыйналуучулугун

көрсөтөлү.

► $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$, $n = 1, 2, 3, \ . \ . \ .$ функцияларын баары

$\forall x \in X = (-\infty, \infty) \equiv R$ аралыгында $\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$ барабарсыздыгына баш ийгендиктен, Вейерштрасстын белгисин колдонууга болот.

Анткени $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сандык катары $p = 2 > 1$ болгондуктан жыйналат,

анда берилген катар $X = (-\infty, \infty)$ көптүгүндө абсолюттук жана бир калыпта жыйналуучу болот.◄

31) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + (4 - x^2)^{\frac{n}{2}}}$ катарын бир калыпта жыйналуучулугун

изилдегиле. ► $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n^2+(4-x^2)^{\frac{n}{2}}}$, $n=1,2,3,\dots$ функциялары

$X=[-2,\ 2]$ кесиндисинде аныкталган жана үзгүлтүксүз болушат. Анткени бөлүмдөрүндөгү квадраттык тамыр алдындагы

$(4-x^2)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{(4-x^2)^n}$ кошулуучулар $|4-x^2|\geq 0 \ \Leftrightarrow\ |x|\leq 2$ шарттарында гана аныкталышат. Анда $\forall\, x\in X=[-2,\ 2]$ кесиндисиндеги чекиттерде

$\left|\frac{\sin nx}{n^2+(4-x^2)^{\frac{n}{2}}}\right|=\frac{|\sin nx|}{n^2+(4-x^2)^{\frac{n}{2}}}\leq\frac{1}{n^2+(4-x^2)^{\frac{n}{2}}}\leq\frac{1}{n^2}$ барабарсыздыгы орун алат. Себеби бөлүмдөгү $(4-x^2)^{\frac{n}{2}}$ оң кошулуучусун таштап жиберсек, бөлчөк чоңоёт. Ошентип $[-2,\ 2]$ кесиндисиндеги бардык x чекиттеринде

$\left|f_n(x)\right|=\left|\frac{\sin nx}{n^2+(4-x^2)^{\frac{n}{2}}}\right|\leq\frac{1}{n^2}$, $n=1,2,3,\dots$ барабарсыздыгы аткарылат.

Анда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сандык катары $p=2>1$ болгондуктан жыйналып,

берилген катар абсолюттук жана бир калыпта жыйналуучу болот.◄

Айрым учурларда, функционалдык катарларга Вейерштрасстын белгисин маанисиндеги сандык можаранттык катар табылбаса деле 14.3 – аныктамасына таянып, бир калыпта жыйналуучулугун көрсөтүүгө болот. Мисалы, 28) – мисалда $[-1,1]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болору далилденген

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}+n}$ функционалдык катарына можаранттык катарды

тандоо кыйынчылыктарды жаратып, иш жүзүндө мүмкүн эместей көрүнөт. Чынында эле $\forall\, x\in X=[-1,\ 1]$: $\left|f_n(x)\right|=\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}+n}\right|\leq\frac{1}{n}$, $n=1,2,3,\dots$ салыштыруусунан, можаранттык катар деп

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ таралуучу гармоникалык катар тандалгандыктан, мисалда

берилген катар Вейерштрасстын белгиси боюнча бир калыпта жыйналбайт деген жаңылыш пикирди жаратат.

14.4.4 Бир калыпта жыйналуучу катарлардын касиеттери

Берилген аралыкта бир калыпта жыйналуучу болгон функционалдык катарлар, көптөгөн практикалык маселелерди эсептөөгө ыңгайлуу шарттарды түзгөн касиеттерге ээ болушат. Анткени катардын ар бир $f_n(x)$ мүчөлөрү, кайсы бир кубулуштарды мүнөздөшүп, алардын чексиз суммасы, ошол кубулуштардан кураштырылган кубулушту түшүндүрөт.

14.14 Теорема. *(28) функционалдык катар* $\mathrm{X} = [a,\ b]$ *кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болсун. Анда ушул эле кесиндиде чектүү болгон, кайсы бир* $\mathrm{g}(x)$ *функциясын көбөйтүүдөн кийин келип чыккан*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{g}(x) \cdot f_n(x)$$

функциональдык кактар да, $[a, b]$ *кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болот.*

► Айталы теореманын шарттары аткарылсын, б.а. (28) катары $[a,\ b]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналып, $S(x)$ суммасына ээ болсун, ал эми $\forall x \in [a,\ b]$: $\mathrm{g}(x)$ функциясы чектелгендиктен, кандайдыр бир К – чыныгы саны табылып, $|\mathrm{g}(x)\ | \le$ К барабарсыздыгы орун алсын.

$[a,\ b]$ кесиндисинде (28) катары бир калыпта жыйналгандыктан, эркин тандалган жетишерлик кичине ε оң санына жараша N_ε номери табылып, андан чоң болгон n номерлери $(n > N_\varepsilon)$ үчүн

$|S(x) - S_n(x)| < \ \varepsilon$ барабарсыздыгы орун алат. Мында $S_n(x)$ деп, (28) катарын $n -$ жекече суммасы алынган.

(28) катарына чектүү $\mathrm{g}(x)$ функциясын көбөйткөндөн кийин келип чыккан функционалдык катар үчүн

$$|\mathrm{g}(x) \cdot S(x) - \mathrm{g}(x) \cdot S_n(x)| = |\mathrm{g}(x)| \cdot |S(x) - S_n(x)| \le \text{К} \cdot |S(x) - S_n(x)|$$

барабарсыздыгы орун алат. ε санын жетишерлик кичине жана эркин тандап олтуруп, $\varepsilon_К = \frac{\varepsilon}{К}$ санын деле жетишерлик кичине жана эркин тандаларына ишенебиз. Анда эркин тандалган жетишерлик кичине $\varepsilon_К$ санына жараша $N_{\varepsilon_К}$ номери табылып, бардык $n > N_{\varepsilon_К}$ номерлери үчүн $|g(x) \cdot S(x) - g(x) \cdot S_n(x)| \leq К \cdot |S(x) - S_n(x)| < К \cdot \frac{\varepsilon}{К} = \varepsilon$ шарты аткарылат же 14.3 – аныктамасы боюнча $\sum_{n=1}^{\infty} g(x) \cdot f_n(x)$ функционалдык катары да $[a, b]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болот.◄

14.15 Теорема. *Айталы, (28) функционалдык катары* $[a,\ b]$ *кесиндисинде* $S(x)$ *функциясына бир калыпта жыйналуучу болуп, катардын бардык* $f_n(x)$ *мүчөлөрү* $X = [a,\ b]$ *кесиндисинде үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Анда ушул эле кесиндиде катардын* $S(x)$ *суммасы да үзгүлтүксүз функция болот.*

► $[a,\ b]$ кесиндисинен эркин тандап алынган чекиттин кыймылын убактылуу токтотуп, аны x_0 деп белгилеп, $S(x)$ тин x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болорун далилдейли.

Теореманын шарты боюнча катар $\forall\, x \in [a,\ b]$: $S(x)$ суммасына бир калыпта жыйналгандыктан, анын n –жекече $S_n(x)$ суммасы менен $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$ байланышында болот $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Мында $R_n(x)$ катардын калдык бөлүгү. Кесиндидеги x_0 чекитинде да бул байланыш $S(x_0) = S_n(x_0) + R_n(x_0)$ сакталат. Мындан

$$|S(x) - S(x_0)| = |S_n(x) + R_n(x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)| \leq$$

$$\leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |R_n(x) - R_n(x_0)| \qquad (35)$$

ээ болобуз.

Функционалдык катар $[a,\ b]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болгондуктан, эркин тандалган жетишерлик кичине ε оң санына жараша N_ε номери табылып, андан чоң $n > N_\varepsilon$ болгон n номерлерине карата $\forall x \in [a,\ b]$:

$$|S(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|<\varepsilon \ \text{ жана } \ |R_n(x_0)|<\varepsilon \qquad (36)$$

барабарсыздыктары аткарылат. Кесиндинин бардык x чекиттеринде, анын ичинде x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болушкан, чектүү $n=N_\varepsilon$ сандагы $f_n(x)$ функцияларын суммасы катарында, $S_n(x)$ үзгүлтүксүз функция болот. Ошондуктан алынган ε санына ылайыкташкан жетишерлик кичине δ оң саны табылып, $|x-x_0|<\delta$ болору менен

$$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\varepsilon \qquad (37)$$

шарты аткарылат, б.а. аргументтер жетишерлик $\delta-$ жакындыгында турушса, функциянын тиешелүү маанилери да $\varepsilon-$ жакындыгына келишет.

(35), (36), (37) барабарсыздыктарын салыштырып, $3\varepsilon-$ санын да эркин алынган жетишерлик кичине экендигин эске алып

$$|x-x_0|<\delta \ \Rightarrow \ |S(x)-S(x_0)|\le|S_n(x)-S_n(x_0)|+|R_n(x)|+$$

$$+|R_n(x_0)|<3\varepsilon,$$

аргументтердин x_0 чекитиндеги чексиз кичине $\delta-$термелүүсүнө, x_0 чекитиндеги катардын $S(x_0)$ суммасы да чексиз кичине 3ε –термелүүсү менен жооп берерин көрөбүз. Анда функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн аныктамасы боюнча, $S(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болору келип чыгат. Эркин тандалган x_0 чекитин кыймылга келтирип, $S(x)$ тин бүтүндөй $[a,\ b]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз болоруна ишенебиз.◄

Натыйжа. *Бир калыпта жыйналуучу жана мүчөлөрү үзгүлтүксүз болгон функционалдык катарда, мүчөлөп пределге өтүү мүмкүн*

$$\lim_{x\to x_0} S(x)=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)=S(x_0).$$

Мисал. 32) $(1-x)+x(1-x)+\ x^2(1-x)+\ \ldots+x^{n-1}(1-x)+\ \ldots$

функционалдык катарын $[0,\ 1]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучулугун изилдегиле.

► Берилген катардын ар бир мүчөсү көрсөтүлгөн кесиндиде үзгүлтүксүз функциялар болушат. Геометриялык прогрессиянын суммасы боюнча анын $n-$ жекече суммасын эсептеп чыгалы

$$S_n(x) = (1-x) + x(1-x) + \ x^2(1-x) + \ \dots + x^{n-1}(1-x) =$$

$= (1-x)\cdot(1+x+x^2+\ \dots + x^{n-1}) = (1-x)\cdot\frac{1-x^n}{1-x} = 1-x^n.$ Мындан пределге өтүп, катардын суммасы

$S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(1-x^n) = \begin{cases} 1, \text{эгерде } 0 \le x < 1 \text{ болсо,} \\ 0, \text{эгерде } x = 1 \text{ болсо} \end{cases}$ кош маанилүү экенин көрөбүз (предел жашаса, жалгыз болот). Берилген $[0,\ 1]$ кесиндисинде катардын бардык мүчөлөрү үзгүлтүксүз болгонуна карабай, анын суммасы болгон $S(x)$ функциясы кесиндинин оң учундагы $x=1$ чекитинде үзүлүүгө ээ болуп олтурат. Себеби, берилген катар $[0,\ 1]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу эмес.◄

Мисалдан көрүнгөндөй мүчөлөрү үзгүлтүксүз болгон функционалдык катардын суммасын үзгүлтүксүз болушу үчүн, катардын бир калыпта жыйналуучулугу жетишерлик шарт болуп эсептелет.

33) Римандын функциясы деп аталган $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ катардын жыйналуучулугун изилдегиле.

► Бул катар $x > 1$ болгондо бир калыпта жыйналуучу болору жогоруда каралган мисалдардан белгилүү. Эгерде жетишерлик кичине $\alpha > 0$ оң санын алсак, анда $x \ge 1+\alpha$ болгон учурда, же x тер 1 санына чексиз жакындап келгенде деле катар бир калыпта жыйналуучугун сактап каларын көрөбүз.

Анткени $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ аткарылып, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ можаранттык катары (сандык) жыйналуучу болгондуктан, Вейерштрасстын белгиси боюнча функционалдык катар бир калыпта жыйналып, анын суммасы болгон

Римандын $\zeta(x)$ функциясы 1 чекитине чексиз жакын чекиттерде да үзгүлтүксүз болот. ◄

14.16 Теорема (мүчөлөп интегралдоо жөнүндөгү).

$$\text{Айталы,} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (38)$$

функционалдык катары $X = [a, b]$кесиндисинде $S(x)$ *функциясына бир калыпта жыйналып, анын бардык* $f_n(x)$ *мүчөлөрү аталган кесиндиде үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Анда* $[a,\ b]$ *кесиндисинде толугу менен кармалып турган каалагандай* $[x_0,\ x]$ $(a \le x_0 \le\ x \le\ b)$ *кесиндиси боюнча (38) функционалдык катарынан алынган анык интеграл*

$$\int_{x_0}^{x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\ \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt, \qquad (39)$$

мүчөлөп интегралдоо эрежеси менен эсептелип, (39) катары, (38) катардын $S(x)$ *суммасынан алынган анык интегралга бир калыпта жыйналып, төмөндөгү теңдештик орун алат*

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f_1(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} f_2(t)\, dt + \ \dots\ . \qquad (40)$$

► Берилген катар $[a,\ b]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болуп, анын бардык мүчөлөрү үзгүлтүксүз $f_n(x)$ функциялары болгондуктан, берилген кесиндиде катардын суммасы $S(x)$ үзгүлтүксүз жана ушул кесиндиде кармалган каалагандай $[x_0,\ x]$ кесиндисинде интегралдануучу функция болот. (38) катарын n −жекече суммасына жана калдык бөлүгүнө карата ажыратып

$S(x) = S_n(x) + R_n(x) = \underbrace{f_1(x) + f_2(x) +\ \dots . + f_n(x)}_{S_n(x)} +\ R_n(x)$ көрүнүштө

жазсак, анда чектүү сандагы функциялардын суммасынан алынган интеграл, интегралдардын суммасына барбар болгондуктан,

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \underbrace{\int_{x_0}^{x} f_1(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} f_2(t)\,dt + \ldots + \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt}_{\int_{x_0}^{x} S_n(t)dt} + \int_{x_0}^{x} R_n(t)\,dt$$

ээ болобуз. Мындан бардык n номери менен белгиленген катардын мүчөлөрүнө (39), (40) теңдештиктерин туура экендигин көрсөтүү үчүн, калдык бөлүктүн интегралын

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} R_n(t)\,dt = 0 \qquad (41)$$

пределдик абалда чексиз кичине болорун көрсөтүү керектигин билебиз.

(38) катары бир калыпта жыйналуучу болгондуктан жетишерлик кичине $\forall\varepsilon > 0$ санын тандасак, ага жараша N_ε номери табылып, андан чоң болгон n номерлери ($n > N_\varepsilon$) үчүн $|S(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| < \varepsilon$ шарты аткарылат. Анда ошол эле $n > N_\varepsilon$ номерлерине карата

$$\left|\int_{x_0}^{x} R_n(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |R_n(t)|\,dt < \varepsilon\cdot(x - x_0)$$ – жетишерлик кичине болору

келип чыгып, (41) дин туура экендигине ишендирет. Ошентип (40) же (39) теңдештиктери $\forall\, n$, $\forall\, x \in [a,\, b]$ үчүн аткарылып, теорема далилденет. ◄

Функционалдык катарды мүчөлөп интегралдоо мүмкүнчүлүгүн бар болушу үчүн, анын бир калыпта жыйналуучулугу негизги же жетиштүү шарт болгону менен зарыл шарт боло албайт, б.а. айрым x чекиттеринде бир калыпта жыйналбаса деле мүчөлөп интегралдоого болот. Мисалы,

34) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$ катары $0 \le x \le 1$ аралыгында бир калыпта жыйналуучу болбойт ($x = 1$ болсо таралат), ошого карабастан катардын $S(x) = \frac{1}{1+x}$ суммасын $0 \le x \le 1$ кесиндисинде мүчөлөп интегралдоого болот жана андан кийин жыйналуучу катар

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = \int_0^1 dx - \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2 dx + \ \dots \ =$$

$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ \dots$ келип чыгат.

14.17 Теорема (мүчөлөп дифференцирлөө жөнүндөгү). *Айталы,*

жыйналуучу $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (42)

функционалдык катарын бардык $f_n(x)$ *мүчөлөрү,* $X = [a,\ b]$ *кесиндисинде үзгүлтүксүз* $f'_n(x)$ *туундуларына ээ болуп,*

$f'_n(x)$туундуларынан т*үзүлгөн* $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ катары, $[a, b]$ кесиндисинде

бир калыпта жыйналуучу болсо, анда $\forall\, x \in [a,\ b]$ *чекиттеринде катарды*

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \qquad (43)$$

мүчөлөп дифференцирлөөгө болот.

► Айталы, (42) катары $S(x)$ суммасына, ал эми анын туундуларынан түзүлгөн катар $\sigma(\,x)$ суммасына ээ болушсун:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{ жана } \ \sigma(\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)\,.$$

$[a,\ b]$ кесиндисинен $a \le x_0 \le \ x \le \ b$ шартын канааттандыра тургандай x_0 , x чекиттерин алып 14.6 – теоремасына таянсак,

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] \ =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = S(x) - S(x_0)$$

теңдештигин алабыз. Мүчөлөрү үзгүлтүксүз функциялар болгон бир калыпта жыйналуучу катардын суммасы катарында $\sigma(x)$ функциясы, бардык x чекиттеринде, анын ичинде x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болот. Ошондуктан жогоруда табылган

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = S(x) - S(x_0) \text{ тендештигин дифференцирлеп,}$$

$$\left[\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt\right]' \equiv \sigma(x) = S'(x) \text{ ээ болобуз. Анда мүчөлөп}$$

дифференцирлөөнүн (43) эрежесин туура болору далилденген болот. ◀

Ошентип, катардын X көптүгүндө бир калыпта жыйналуучулугунан, аны мүчөлөп дифференцирлегенден кийинки катардын бир калыпта жыйналуучу болушу жана (43) теңдештигин аткарылышы келип чыга бербейт. Мүчөлөп дифференцирлөөнүн (43)

эрежеси, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ катары бир калыпта жыйналуучу болгондо

гана аткарылат.

§14.5 Даражалуу катарлар

14.5.1 Даражалуу катардын жыйналуу интервалы жана радиусу

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \qquad (44)$$

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n \quad (45)$$

көрүнүштөрдөгү функционалдык катарларды даражалуу катар деп айтабыз. Мында $\forall\, n :\ c_n$ – турактуу чыныгы сандары $(n = 1, 2, 3, \dots)$ катардын коэффициенттери деп аталышат. Башка функционалдык

катарлардан айырмаланышып, даражалуу катарлар жок дегенде бир чекитте жыйналуучу болушат. Мисалы, (44) катары $x = 0$ чекитинде, ал эми (45) катары $x = x_0$ чекитинде $S(x_0) = c_0$ суммасына ээ болушат. Демек, алардын жыйналуу областтары, ошол жыйналуу чекиттерге жакынкы аймактагы чекиттердин көптүгү болот.

14.18 Абельдин теоремасы. *Эгерде (44) даражалуу катары кайсы бир нөлдөн айырмалуу* $x = x_1 \neq 0$ *чекитинде жыйналуучу болсо, анда* $|x| < |x_1|$ *шартына баш ийген бардык* x *чекиттеринде абсолюттук жыйналуучу болот. Ал эми кайсы бир* $x = x_2$ *чекитинде таралуучу болсо, анда* $|x| > |x_2|$ *шартын канааттандырган бардык* x *чекиттеринде таралуучу болот.*

►Айталы, (44) катар $x = x_1 \neq 0$ чекитинде $\sum_{n=0}^{\infty} c_n {x_1}^n$ жыйналуучу

болсун. Анда анын жалпы мүчөсү ушул $x = x_1$ чекитинде катардын жыйналуучулугун зарыл шартын $\lim_{n\to+\infty} c_n {x_1}^n = 0$ канааттандырат. Мындан кандайдыр бир оң чектүү М саны табылып, бардык n дер үчүн $c_n {x_1}^n$ мүчөсүн чектелген $|c_n {x_1}^n| < M$ экендигин көрөбүз, антпесе анын предели нөлгө тең болбос эле.

Демек, $|x| < |x_1|$ болгондо $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ катарын жалпы

мүчөсүн $|c_n x^n| = |c_n {x_1}^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M \cdot q^n$ көрүнүштө баалоого болот. Мында q саны, $q = \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < 1$ белгилөөсү аркылуу киргизилген, чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын тийиндиси катары тандалат.

Ал эми можаранттык $\sum_{n=0}^{\infty} M\, q^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сандык катары $0 \leq q < 1$

болгондо гана, чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия катарында жыйналат. Ошондуктан бул шартты $q = \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < 1 \iff |x| < |x_1|$

көрүнүштө жазып, Вейерштрасстын салыштыруу теоремасы боюнча можаранттык катардан кичине болгон

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (q < 1)$$

катар катарында, (44) катарынын $|x| < |x_1|$ болгондо абсолюттук жыйналуучу болоруна ишенебиз.

Айталы (44) катары $x = x_2$ чекитинде таралуучу болсун. Эгерде тескерисинче $|x| > |x_2|$ болгон x чекиттеринде жыйналат деп тескери ойлосок, анда теореманын далилденген бөлүгү боюнча $|x_2| < |x|$ шартына баш ийген чекит катарында $x = x_2$ чекитинде да, (44) катары жыйналуучу болууга тийиш. Бул $x = x_2$ чекитинде катарды таралуучу деп алганыбызга каршы келип, $|x| > |x_2|$ шартына баш ийген x чекиттеринде катар жыйналат деген тескери оюбуздун туура эмес экендигин далилдейт. Демек, мындай x чекиттеринде катар таралуучу гана боло алат. ◄

(44) катары $x_1 \neq 0$ чекитинде жыйналуучу болсо, анда

$(-|x_1|,\ |x_1|)$ интервалын бардык x чекиттеринде абсолюттук жыйналуучу, ал эми $x = x_2$ чекитинде таралуучу болсо, анда

$(-\infty,\ -|x_2|)$ жана $(|x_2|,\ +\infty)$ чексиз интервалдарында таралуучу болоруна Абельдин теоремасы кепилдик берет. Бул учурда сан огундагы О башталмасына карата симметриялуу болушкан эки "$-R$" жана "$+R$" тамгалары менен белгиленген чекиттер (сандар) жашап,

____x_2____$(-R$ ___x_1________0__________x_1___$+R)$____x_2_____

алар даражалуу катардын жыйналуу интервалы менен таралуу интервалын бөлүп турушат. Ал чекиттер жыйналуучу чекиттердин абсолюттук чоңдугу боюнча эң чоңу $R = \max\{|x_1|\}$, таралуучу чекиттердин эң кичинеси $"-R" = \min\{|x_2|\}$ катарында аныкталышат. Табылган R саны даражалуу катардын жыйналуу радиусу, ал эми $(-R,\ R)$ жыйналуу интервалы деп аталышат. Аны төмөндөгүдөй теорема катарында баяндоого болот.

14.19 Теорема. *Айталы, (44) даражалуу катары нөлдөн айырмалуу* x *чекитинде жыйналуучу болсун. Анда кандайдыр бир* R *саны* $(R > 0)$ *табылып,* $|x| < R$ *шартына баш ийген бардык* x *чекиттерде (44) катары абсолюттук жыйналуучу, ал эми* $|x| > R$ *болгондо таралуучу даражалуу катар болушу мүмкүн* ($R = \infty$ да боло алат).

Жыйналуу интервалын учтарында даражалуу катардын жыйналуучулугун үч учурга бөлүп кароого болот:

1) Даражалуу катар жыйналуу интервалын эки $x = -R,\ x = R$ учтарын экөөсүндө тең бир учурда жыйналуучу болот.

2) Эки $x = -R,\ x = R$ учтарын экөөсүндө тең бир учурда таралуучу болот.

3) Бир учунда жыйналуучу, экинчи учунда таралуучу болот.

(45) даражалуу катар үчүн $x_0 \neq 0$ болгон учурда, жыйналуу радиустары ошол эле R саны болуп кала бергени менен, жыйналуу интервалы x_0 чекитине карата $(x_0 - R, x_0 + R)$ симметриялуу жайгашат.

Даражалуу катардын жыйналуу радиустарын аныктоо ыкмаларына токтолойлу:

1) Даламбердин белгиси боюнча $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L$, $0 < L < +\infty$ чектүү предели жашаса, анда (44), (45) даражалуу катарлардын жыйналуу радиусун

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \frac{1}{L} \qquad (46)$$

формуласы менен эсептейбиз.

► Чынында эле (44) катарын мүчөлөрүнүн абсолюттук чоңдуктарынан түзүлгөн

$$|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \dots + |c_n x^n| + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \qquad (47)$$

катарга Даламбердин белгисин колдонсок,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|\cdot|x^{n+1}|}{|c_n|\cdot|x^n|}=|x|\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=|x|\cdot L$ келип чыгат. Табылган пределдик маани $|x|\cdot L<1 \;\Leftrightarrow\; |x|<\frac{1}{L}$ болсо (47) катары жыйналуучу , $|x|\cdot L>1 \;\Leftrightarrow\; |x|>\frac{1}{L}$ болсо таралуучу болгондуктан, (44) даражалуу катары $|x|<\frac{1}{L}$ шартына баш ийген бардык x чекиттеринде абсолюттук жыйналуучу болуп, $R=\frac{1}{L}$ жыйналуу радиусуна ээ болот. ◀

2) Кошинин белгиси боюнча $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n x^n|}=|x|\cdot\lambda<1 \;\Leftrightarrow\; |x|<\frac{1}{\lambda}$ болгондо (44) катары абсолюттук жыйналат, ал эмит $|x|>\frac{1}{\lambda}$ болгондо таралат. Анда катардын жыйналуу радиусу

$$R=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \qquad (48)$$

формуласы менен эсептелет.

Ошентип (44), (45) катарларын экөөсүнүн тең жыйналуу радиустары (46), (48) формулалары менен табууга болот. Бирок, (44) катардын жыйналуу интервалы $(-R,\ R)$ жана (45) катардын жыйналуу интервалы (x_0-R, x_0+R) эки башка көрүнүштөрдө жазылышып, интервалдын учтарындагы жыйналуучулук, ар бир катардын өзгөчөлүгүнө жараша жогорудагы үч учурларды эске алуу менен кошумча изилденет. Эгерде (46), (48) пределдерин мааниси

$L=\infty,\ \lambda=\infty$ болушса, анда $R=0$ болуп (44) катары бир гана $x=0$ чекитинде, (45) катары бир гана $x=x_0\neq 0$ чекитинде жыйналуучу боло алышат. Ал эми пределдер $L=0,\ \lambda=0$ маанилерине ээ болушса, анда эки катар тең бүтүндөй $(-\infty,+\infty)$ сан огунда жыйналуучу болушат.

15. Мисалдар

35) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n$ функциясын аныкталуу областын таап, үзгүлтүксүздүгүн изилдегиле.

► Кошинин (48) белгисин пайдаланып, берилген функциянын аныкталуу областын аныктайбыз.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n x^n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(x^2+\frac{1}{n}\right) = x^2$ болгондуктан,

$x^2 < 1$ болсо гана катар $f(x)$ функциясына жыйналып, $x^2 > 1$ болгондо таралып кайсы бир $f(x)$ суммасына ээ боло албайт. Ошондуктан $f(x)$ функциясын аныкталуу областы $x^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; (-1,\ 1)$ интервалы болот. Аралыктын учтарындагы $x = \pm 1$ чекиттерде катар таралуучу, анткени анын жалпы $f_n(\pm 1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ мүчөсү, катардын жыйналуучулугун зарыл шартына баш ийбейт $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$.

Функциянын үзгүлтүксүздүгүн изилдейли. Ал үчүн $0 < a < 1$ шартын канаатандырган, каалагандай a санына карата түзүлгөн $[-a,\ a]$ кесиндисинде $\left([-a,\ a] \subset (-1,\ 1)\right)$, мүчөлөрү үзгүлтүксүз $f_n(x) = \left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n$ функциялар болушкан, катардын бир калыпта жыйналуучу болорун көрсөтүү керек.

a саны менен 1 санын арасынан b санын тандап $(a < b < 1)$, кайсы бир N номеринен баштап $n > N$ болгондо $a + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b$ барабарсыздыгын аткарылышына жетишүүгө болот. Анда ушундай $n > N$ номерлери үчүн, $|x| \leq a$ болгондо

$$\left(x^2+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(|x|+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq \left(a+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq b^{2n}$$

барабарсыздыгын аткарылышын көрөбүз. Мындан

$b^2 + b^4 + b^6 + \ldots + b^{2n} + \ldots$

чексиз кемүүчү ($b < 1$) жыйналуучу геометриялык прогрессиянын, берилген функционалдык катарга мажоранттык катар болору келип чыгып, Вейерштрасстын теоремасы боюнча функционалдык катар бир калыпта жыйналуучу болот. Анда катардын $f(x)$ суммасы $[-a,\ a]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функция болот. a саны эркин алынгандыктан

$a \to 1$ чексиз жакындаганда, $f(x)$ тин бүтүндөй $(-1,\ 1)$ интервалда үзгүлтүксүз функция болоруна ишенебиз.◄

36) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\,x^n$ катарын жыйналуу областын тапкыла.

► Берилген катардын жыйналуу радиусун (46) формуласы менен табабыз $R = \lim_{n\to+\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|(-1)^{n-1}n|}{|(-1)^n(n+1)|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. Демек, берилген даражалуу катар $(-1,\ 1)$ интервалында абсолюттук жыйналуучу болот.

Аралыктын учтарындагы жыйналуучулугун изилдейли. Оболу

$x = -1$ десек, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\,(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}n = \sum_{n=1}^{\infty}(-n)$ сандык

катары келип чыгып, жыйналуучулуктун зарыл шарты $\lim_{n\to+\infty}(-n) \neq 0$ аткарылбагандыктан таралуучу болот. Ал эми $x = 1$ учунда да, жалпы мүчөсү $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}n \neq 0$ зарыл шартка баш ийбегендиктен, таралуучу болот.◄

37) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,2^n}(x+2)^n$ катарын жыйналуу областын тапкыла.

► Даламбердин белгисинен келип чыккан (46) формуласын

пайдаланып, жыйналуу радиусун

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\,2^n}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,2^{n+1}}{n\,2^n} =$$

$= 2\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2$ табабыз. Демек, берилген даражалуу катар $x_0 = -2$ чекитине карата симметриялуу жайгашкан

$|x+2| < 2 \iff -2 < x+2 < 2 \iff -4 < x < 0$ же

$(x_0 - R, x_0 + R) = (-4,\ 0)$ интервалында абсолюттук жыйналуучу болот.

Аралыктын $x = -4$ учунда төмөндөгүдөй таралуучу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

гармоникалык катар келип чыккандыктан, берилген катар таралат. Ал эми экинчи $x = 0$ учунда, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ белгиси кезектешме шарттуу жыйналуучу катарга ээ болобуз.◄

38) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(x-2)^n}{n^n}$ катарын жыйналуу областын тапкыла.

► Кошинин белгисинен келип чыккан (48) формуласын колдонуп,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n^n} \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n^n}\right|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

жыйналуу радиусуна ээ болуп, берилген даражалуу катардын бүтүндөй $(-\infty,\ \infty)$ сан огунда абсолюттук жыйналуучу болорун көрөбүз.◄

14.5.2 Даражалуу катардын бир калыпта жыйналуучулугу жана анын суммасынын үзгүлтүксүздүгү

14.20 Теорема. $(-R,\ R)$ *жыйналуу интервалында толугу менен кармалып турган, каалагандай* $[-a,\ a]$ *кесиндисинде*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ даражалуу катары, бир калыпта жыйналуучу болот}$$

$\left(a > 0,\ R > 0,\ \ -R < -a < a < R,)\right)$.

► Айталы $0 < a < R$ болсун. Анда $|x| \le a$ шартына баш ийген бардык x тер үчүн $|c_n x^n| \le c_n a^n$ орун алып, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n$ жыйналуучу сандык катарын можаранттык катар деп алууга болот.

Анткени $x = a \in (-R,\ R)$. Анда Вейерштрасстын теоремасы боюнча $\left[-a,\ a\right]$ кесиндисинде берилген даражалуу катар абсолюттук жана бир калыпта жыйналуучу болот. ◄

14.21 Теорема. Даражалуу $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ катардын $S(x)$ суммасы, *анын жыйналуу интервалын ар бир* x *чекитинде* $\left(\forall x \in (-R,\ R)\right)$ *үзгүлтүксүз функция болот.*

► Кандайдыр бир a санын ($0 < a < R$) алып, $(-R,\ R)$ интервалыда жайгашкан каалагандай x чекитине карата $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ шартына баш ийип, $(-R,\ R)$ интервалында толугу менен кармалып турган $\left[-a,\ a\right]$ кесиндисин түзө алабыз. 14.20 – теорема боюнча даражалуу катар түзүлгөн кесиндиде бир калыпта жыйналгандыктан, 14.15 – теорема боюнча $\left[-a,\ a\right]$ кесиндисинде жана ага таандык болгон x чекитинде $S(x)$ суммасы үзгүлтүксүз функция болот. Алынган a санын R ге чекисз жакындатуу менен, $\forall x \in (-R,\ R)$ чекиттеринде $S(x)$ тин үзгүлтүксүз болорун көрөбүз. ◄

14.5.3 Даражалуу катарларды мүчөлөп интегралдоо жана дифференцирлөө

14.22 Теорема (мүчөлөп интегралдоо жөнүндө). Суммасы $S(x)$, *жыйналуу радиусу R санына барабар болгон каалагандай даражалуу катардын: 1)* $(-R,\ R)$, $R > 0$ *жыйналуу интервалындагы ар бир* x *чекитинде мүчөлөп интегралдоого болот жана ал*

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^x \left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n\right\} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x c_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}. \qquad (49)$$

эрежеси менен ишке ашырылат.

2) Мүчөлөп интегралдоонун натыйжасында келип чыккан даражалуу катардын жыйналуу радиусу өзгөрбөстөн, ошол эле R санына барабар болот.

► $(-R,\ R)$ интервалында жайгашкан ар бир x чекитин кармап тургандай $[-a,\ a]$ кесиндисин түзүүгө болорун, жогорудагы 14.20 - теореманын далилдөөсүнөн билебиз $\left(0 < a < R,\ [-a,\ a] \subset (-R,\ R)\right)$. Түзүлгөн кесиндинин $0 < |x| < a < R$ шартына баш ийген бардык x чекиттеринде даражалуу катар бир калыпта жыйналуучу болгондуктан, аны мүчөлөп интегралдоо мүмкүн экендиги 14.16 – теоремадан белгилүү. Анда даражалуу катардын $[0,\ x]$ кесиндиси боюнча анык интегралын (49) эрежеси менен эсептөөгө болору далилденет.

(49) катардын да жыйналуу радиусу R болорун көрсөтөлү. Айталы, (49) катарын жыйналуу радиусу R_1, жалпы мүчөсү $a_n = \frac{c_{n-1}}{n}$ болсун. Даламбердин белгисинен келип чыккан (46) формуланы колдонуп, чын эле экөөсүнүн

$$R_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{c_{n-1}}{n}\right|}{\left|\frac{c_n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left\{\frac{|c_{n-1}|}{|c_n|} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} =$$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \left\{\frac{|c_{n-1}|}{|c_n|} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = R \cdot 1 = R$ барабар болоруна күбө болобуз.◄

14.23 Теорема (мүчөлөп дифференцирлөө жөнүндө). *Суммасы $S(x)$, жыйналуу радиусу R санына барабар болгон каалагандай*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ даражалуу катарды:} \qquad (50)$$

1) $(-R,\ R)$, $R > 0$ жыйналуу интервалында жайгашкан ар бир x чекитинде

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\,c_n x^{n-1} \qquad (51)$$

эрежеси боюнча мүчөлөп дифференцирлөөгө болот.

2) Мүчөлөп дифференцирлөөнүн натыйжасында келип чыккан (51) даражалуу катардын жыйналуу радиусу өзгөрбөстөн, ошол эле R санына барабар болот.

► (51) катардын суммасы $\sigma(x)$ болсун дейли. (50), (51) катарлардын экөөсү тең бир эле жыйналуу интервалына ээ жана бул интервалда толугу менен кармалып турган $[-a,\ a]$ кесиндисинде бир калыпта жыйналуучу болушат $\left(0 < a < R,\ [-a,\ a] \subset (-R,\ R)\right)$.
Ошондой эле, (50) катардын мүчөлөрүн туундулары болушкан (51) катардын мүчөлөрү $[-a,\ a]$ кесиндисинде үзгүлтүксүз функциялар болушат, анда 14.17 – теореманын шарттары аткарылып, $\sigma'(x) = S(x)$ теңдештиги орун алат же (51) эреженин туура болору далилденет.

Айталы $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ катары $R,$ ал эми $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ катары R_1 жыйналуу

радиустарына ээ болушсун. (51) катардын жалпы мүчөсүн

$a_n = (n+1)c_{n+1}$ деп белгилесек, Даламбердин белгиси боюнча анын жыйналуу радиусу

$$R_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|(n+1)c_{n+1}|}{|(n+2)\,c_{n+2}|} = \lim_{n\to+\infty} \left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_{n+2}|} \cdot \frac{n+1}{n+2}\right\} =$$

$= \lim_{n\to+\infty} \left\{\frac{|c_{n+1}|}{|c_{n+2}|} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right\} = R \cdot 1 = R$, баштапкы даражалуу (50) катарын жыйналуу радиусуна барабар болорун көрөбүз.◄

Натыйжа. *Даражалуу катарды* $(-R,\ R)$ *жыйналуу радиусунда, каалаганчалык тартипте мүчөлөп дифференцирлөөгө болот жана бардык тартиптеги дифференцирлөөдөн кийин келип чыккан даражалуу катарлардын жыйналуу радиустары өзгөрбөстөн* R *саны бойдон кала берет.*

39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ даражалуу катарын суммасын тапкыла.

► Даламбердин белгисине таянып, даражалуу катардын жыйналуу

$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ радиусун табабыз. Анда берилген катар $(-1,\ 1)$ интервалында калыпта жыйналуучу жана

мүчөлөрү үзгүлтүксүз функциялар болгондуктан, катардын $S(x)$ суммасы да үзгүлтүксүз функция болуп, жыйналуу интервалында катарды мүчөлөп дифференцирлөөгө болот

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} .$$

Акыркы катар $(-1,\ 1)$ интервалында тийиндиси $q = -x$, биринчи мүчөсү $b_1 = 1$ болгон чексиз кемүүчү геометриялык прогрессия катарында $S'(x) = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1+x}$ суммасына ээ болот. Анда $[0,\ x] \subset (-1,\ 1)$ кесиндисинде берилген катардын суммасы

$S(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln x - \ln 1 = \ln x$ көрүнүштө табылат.◄

40) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n$ катарын суммасын тапкыла.

► Катардын жыйналуу радиусу $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|n|}{|n+1|} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ болгондуктан, $(-1,\ 1)$ интервалын бардык чекиттеринде

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x + 2\, x^2 + 3x^3 + \ \dots + n\, x^n + \ \dots = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} =$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (\, x^n)' = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left| \begin{matrix} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ \text{геом.} \\ \text{прогр.} \end{matrix} \right| = x \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

теңдештиги орун алып, мисалдагы катардын суммасы $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ болот. ◄

§ 14.6 Тейлордун катары

14.6.1 Функцияларды Тейлордун катарына ажыратуу

2 – бөлүктө (§9.7, 9.42 – формуласы) белгиленгендей $[a,\ b]$ кесиндисинде $n-$ тартиптеги туундусу жашаган $f(x)$ функциясын, ушул кесиндинин $x = x_0$ чекитин кайсы бир чеке белинде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta\Delta x)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (52)$$

көрүнүштөгү Тейлордун көп мүчөсүнө ажыратып жазуу мүмкүнчүлүгү каралган. Мында $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}(x - x_0)^n$ Лагранж тибиндеги калдык мүчө деп аталып, $x_0 = 0$ болгондо (52) ни Маклорендин көп мүчөсү деп айтканбыз. $f(x)$ функциясын (52) көрүнүштө ажыратуунун негизги максаты, кайсы бир кубулуштун математикалык тилдеги модели болгон $f(x)$ функциясын тикелей изилдей албай, ошол кубулуш жөнүндө маалымат алуу татаал болгон учурда, аны (52) көп мүчөсү менен алмаштыруу болуп эсептелет.

14.4 Аныктама. *Эгерде $(-R,\ R)$ интервалын бардык x чекиттеринде каалаганчалык (чексизге чейин) тартипке чейинки чектүү туундулары жашаган $f(x)$ функциясы,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

катарына сумма боло алса, анда $(-R, R)$ интервалында $f(x)$ функциясын

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (53)$$

даражалуу катарына ажырайт деп айтабыз .

Оболу, $f(x) \in C^{\infty}(-R,\ R)$ функциясын (53) көрүнүштөгү катарга ажыратуу бирөө гана болорун көрсөтөлү.

14.24 Теорема. *Эгерде* $(-R,\ R)$ *интервалында* $f(x)$ *функциясын (53) көрүнүштөгү даражалуу катарга ажыратуу мүмкүн болсо, анда мындай ажырылуу бирөө гана болот, б.а. (53) катардын коэффициенттери жана суммасы бир маанилүү аныкталат.*

► Айталы, $f(x)$ функциясы $\forall x \in (-R,\ R)$ чекиттеринде (53) катарына ажырасын:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad . \qquad (53^{\text{А}})$$

Ажыралышты n −тартипке чейин мүчөлөп дифференцирлеп,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + n\, c_n x^{n-1} + (n+1)c_n x^n \ldots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3\, x + \ldots + (n-1)\cdot n\, c_n x^{n-2} + n\cdot(n+1)\, c_n x^{n-1} + \ldots$$

....

$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot \ldots\cdot (n-1)\cdot n\, c_n + 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot (n+1)c_n x + \ldots$$

алардын $x = 0$ чекитиндеги маанилеринен $(53^{\text{А}})$ ажыралышын

$$f^{(n)}(0) = 1\cdot 2\cdot \ldots\cdot (n-1)\cdot n\, c_n \quad \Leftrightarrow \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad (54)$$

c_n коэффициенттерин табабыз (2 – бөлүк, §9.7).

Мында $c_0 = f(0) = f^{(0)}(0)$, $0! = 1$. Ошентип, функциянын туундусун бир маанилүүлүгүнөн, (54) эрежеси боюнча даражалуу катардын c_n коэффициенттерин бир маанилүү аныктоого болору келип чыгат. Мындан $f(x)$ функциясын (53) көрүнүштөгү бир гана даражалуу катарга ажыратуу мүмкүн деген жыйынтыкка келебиз.◄

Эгерде $f(x)$ функциясын $x = x_0$ чекитинде чексизге чейинки тартиптеги туундулары жашап,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n (x - x_0)^n + \ldots \quad (53^{\text{В}})$$

көрүнүштөгү даражалуу катарга ажыратуу мүмкүн болсо, анда Тейлордун коэффициенттери деп аталышкан катардын

коэффициенттерин $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ $\qquad (54^A)$

формулалары менен табабыз ($c_0 = f(x_0) = f^{(0)}(x_0)$, $0! = 1$).

Мурда кабыл алынган белгилөөлөрдү (2 – бөл., §9.7, 9.42) бузбастан, (54) жана (54^A) формулаларын эске алып, $x = 0$ чекитине симметриялуу $(-R,\ R)$ интервалында $f(x)$ функциясын (53) көрүнүштөгү

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 \ \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} + \ \dots \qquad (55)$$

даражалуу катарга ажыралуусун *Маклорендин катары деп (53)* , ал эми $x = x_0$ чекитине симметриялуу болгон $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ интервалындагы (53^B) көрүнүштөгү даражалуу катарга ажыралышын

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!!} (x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \ \dots \quad (56)$$

Тейлордун катары деп, (56) көрүнүштөрдө жазабыз.

14.6.2 Тейлодун катарына ажыроо шарттары

$f(x)$ функциясын кандай шарттарда Тейлордун катарына ажыратууга болот деген суроого, $x_0 = 0$ болгон учурда же Маклорендин катары үчүн жооп берели.

14.25 Теорема. *$f(x)$ функциясын $(-R,\ R)$ интервалында (55) көрүнүштөгү Маклорендин катарына ажыратуу үчүн, аталган интервалда $f(x)$ функциясын чексиз тартипке чейинки туундуларын жашашы жана*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3\ \ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x) \qquad (55)$$

катарын $R_n(x)$ *калдык бөлүгүнүн чексиз кичине чоңдук болушу, б.а.* $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$ *болушу зарыл жана жетиштүү.*

► **Зарылдыгы:** Айталы $f(x)$ функциясы, $(-R,\ R)$, $R>0$ интервалында (55) көрүнүштөгү Маклерондун катарына ажыратылып жазылсын, б.а. $f(x)$ функциясы (55) теңдештигин оң жагындагы даражалуу катардын суммасы болсун. Анда аталган интервалда даражалуу катар $f(x)$ суммасына абсолюттук жана бир калыпта жыйналат жана интервалдын бардык чекиттеринде мүчөлөрү үзгүлтүксүз функциялар экендиги жазылыштан көрүнүп турат. Бул учурда катардын суммасы болгон $f(x)$ функциясын каалагандай тартиптеги туундулары, катарды мүчөлөп дифференцирлөө менен ишке ашырылгандыктан, (55) катардын мүчөлөрүн чексизге чейин дифференцирлөө мүмкүнчүлүгү, $f(x)$ функциясына да чексиз тартипке чейин дифференцирленүүчү болушуна мүмкүнчүлүк берет.

(55) катардын $n-$ калдык бөлүгүн ачыктап көчүрүп жазсак, калдык чексиз сумма

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x^{n+2}+\ \ldots \quad (56)$$

көрүнүштө жазылат. Шарт боюнча (55) даражалуу катары $(-R,\ R)$ интервалында $f(x)$ функциясына жыйналат, анда ушул интервалда катардын бардык калдык бөлүктөрү, анын ичинде $n-$калдык бөлүгү

$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$ чексиз кичине чоңдук болот.

Жетиштүүлүгү: Айталы, $f(x)$ функциясы $(-R,\ R)$ интервалында чексиз тартипке чейин дифференцирленүүчү жана катардын (56) калдык бөлүгү $\forall x\in(-R,\ R)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$ чексиз кичине чоңдук болсун.

$f(x)$ функциясын (55) көрүнүштөгү даражалуу катарга ажыратуунга болорун далилдейли.

Катардын $S(x)$ суммасы менен $n-$ жекече сумма жана калдык бөлүк $S(x) = S_n(x) + R_n(x) \;\Leftrightarrow\; R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ байланышында болору белгилүү. Шарт боюнча $R_n(x)$ чексиз кичине чоңдук, анда катардын (56) калдык бөлүгүн

$$R_n(x) = f(x) - \underbrace{\left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]}_{(55)\text{ тин } n-\text{ жекече суммасы}}$$ көрүнүштө

жазып, айырманын да $\forall x \in (-R,\ R)$ үчүн чексиз кичине чоңдук

$$\left|f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right]\right| = |R_n(x)| \to 0$$ болорун

көрөбүз. Мындан (55) катарын $n-$ жекече суммасы, $f(x)$ функциясынан чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланары келип чыгып, (55) даражалуу катардын суммасы $f(x)$ функциясы болору далилденет. ◄

Практикалык иштерде функциянын даражалуу катарга ажыралуусуна жетиштүү шарт катарында, төмөндөгү теореманы колдонуу ыңгайлуу.

14.26 Теорема. *$f(x)$ функциясын $(-R,\ R)$ интервалында (55) көрүнүштөгү даражалуу катарга ажыратуу үчүн, $f(x)$ функциясын бардык тартиптеги $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ туундулары жашап, алардын бардыгы кандайдыр бир чектүү К санынан ашып*

$|f^{(n)}(x)| \le$ К *кетпөөсү жетиштүү.*

► Айталы, $(-R,\ R)$ интервалында $f(x)$ функциясын бардык тартиптеги $f^{(n)}(x)$ туундулары жашап, $|f^{(n)}(x)| \le$ К шартына баш ийсин. Анда берилген интервалда $f(x)$ функциясы үчүн, азырынча жыйналуучулугу белгисиз болгон Тейлордун ажыралышын

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (c_0 = f(0) = f^{(0)}(0), \qquad 0! = 1)$$

убактылуу жазып туруу мүмкүн. Изилдөөнүн жүрүшүндө, анын чынында эле $f(x)$ функциясына жыйналарын далилдейбиз. Ал үчүн $R_n(x)$ калдыгын чексиз кичине болорун көрсөтүү жетиштүү.

Жыйналуучу катардын кайсы бир N номеринен баштап бир эле мүчөсү эмес, анын каалаганчалык мүчөлөрүнүн суммасы чексиз кичине чоңдук болору белгилүү (Кошинин принциби). Ошондуктан анын чексиз суммадан турган $R_n(x)-$ калдык бөлүгүн чексиз кичине болорун көрсөтүү маселесин, ошол N номеринен баштап каалаганчалык чектүү сандагы мүчөлөрүн суммасынын чексиз кичине болорун көрсөтүү менен алмаштырууга болот. Ал эми N номеринен баштап каалаганчалык сандагы мүчөлөрдүн суммасынын чексиз кичине болуусу, калдык мүчөлөрдүн арасынан салыштырмалуу чоңу болгон N ден кийинки биринчи кошулуучунун жүрүм турумунан эле байкалат. Аны байкаган изилдөөчүлөр (Коши, Пеано, Лагранж ж.б.) калдык бөлүктү биринчи кошулуучусуна карата эле баалоо усулдарын ойлоп табышкан.

(55) катарынын калдык бөлүгүн $x_0=0$ чекитин жакынкы аймагында Лагранж тибинде жазып $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$, анын жүрүм турумун баалап көрөлү. Теореманын шарты боюнча

$\forall\, x\in(-R,\ R)$: $-R<x<R$ жана $\left|f^{(n+1)}(\theta x)\ \right|\le К$, себеби θx да берилген интервалга таандык $\theta x\in(-R,\ R)$. Анда бардык $n=0,1,2,\ldots$

жана $\forall\, x\in(-R,\ R)$: $0\le|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!}<\frac{К\cdot R^{n+1}}{(n+1)!}$ $(*)$ барабарсыздыгы аткарылат. Бул учурда мажоранттык катар сыяктуу

алынган $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{К\cdot R^{n+1}}{(n+1)!}$ сандык катары, Даламбердин белгиси боюнча

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{К\cdot R^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{К\cdot R^{n+1}}{(n+1)!}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{К\cdot R^{n+2}\cdot(n+1)!}{(n+2)!\cdot К\cdot R^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{R}{n+2}=0<1$ жыйналуучу

болгондуктан, анын жалпы мүчөсү жыйналуучулуктун зарыл шартына

баш ийип $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{К\cdot R^{n+1}}{(n+1)!}=0$ пределине ээ болот. Анда $(*)$ дан $|R_n(x)|$ калдыгын да чексиз кичине $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$ болору келип чыгып, теорема далилденет.◄

14.6.3 Элементардык функцияларды Тейлордун катарына ажыратуу

I. $\boldsymbol{f(x)=e^x}$. e санын каалагандай даражага көтөрүүгө болгондуктан, $f(x)=e^x$ функциясы $(-\infty,+\infty)-$ сан огунун бардык чекиттеринде аныкталган жана үзгүлтүксүз, каалаганчалык тартиптеги үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция болот. Ошондой эле кандай гана $a>0$ санын алсак да, $(-a,\ a)$ интервалында бардык $f^{(n)}(x)=(e^x)^{(n)}=e^x$, $n=0,1,2,\ldots$ тартиптеги туундулары $\left|f^{(n)}(x)\ \right|=e^x<e^a=К$ чектелген болушат. Анда $f(x)=e^x$ функциясы $(-a,\ a)$ интервалында 14.26 – теореманын шарттарын канааттандырып, Маклорендин катарына бир маанилүү ажырайт.

$f^{(n)}(0)=e^0=1,\ n=0,1,2,3,\ldots$ болгондуктан Тейлордун (55) формуласын пайдаланып, $\forall x\in(-a,\ a)$: $f(x)=e^x$ функциясын жыйналуу радиусу $R=+\infty$ болгон, төмөндөгүдөй даражалуу катарга ажыратууга болот деген жыйынтыкка келебиз

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ \ldots+\frac{x^n}{n!}+\ \ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ . \qquad (57)$$

Ал эми x ти "$-x$" ке алмаштырсак, анда

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ \ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ \ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\ .$$

катарына ээ болобуз ($x\in(-\infty,+\infty)$).

II. $\boldsymbol{f(x)=\sin x}$. Берилген функция $(-\infty,+\infty)$ аралыгында аныкталган жана үзгүлтүксүз болуп, бардык тартиптеги туунудулары жашап, үзгүлтүксүз жана чектелген функциялар болушат

$\left|f^{(n)}(x)\ \right| = \left|(\sin x)^{(n)}\ \right| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\ \right| \leq 1\ ,\ n = 0, 1, 2, \dots\ .$ Анда 14.26 – теоремага таянып, $f(x) = \sin x$ функциясын $(-\infty, +\infty)$ интервалында Маклорендин катарына ажырата алабыз. Тейлордун коэффициенттерин

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots \text{ жуп номер болсо,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n = 1, 3, 5, \dots \text{так номер болсо} \end{cases}$$

көрүнүштө эсептеп, жыйналуу радиусу $R = +\infty$ болгон

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ \dots\ +\ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +\ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

даражалуу катарга ээ болобуз ($x \in (-\infty, +\infty)$).

III. $\boldsymbol{f(x) = cos\, x}$. Берилген функцияны жогорудагыдай эле талкуулоолорду жүргүзүп, $(-\infty, +\infty)$ интервалында жыйналуу радиусу $R = +\infty$ болгон

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \dots\ +\ (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} +\ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \qquad (58)$$

даражалуу катарга ажыратабыз ($x \in (-\infty, +\infty)$).

IV. $\boldsymbol{f(x) = (1 + x)^{\alpha}}$, Мында $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha} > -1$ болгон чыныгы сан. Бул функция үчүн $f(0) = 1$ шарты аткарылып,

$$(1 + x) \cdot f^{'}(x) = \alpha \cdot f(x) \qquad (59)$$

теңдештиги орун алат. Ошондуктан ушул $S(0) = 1$ шартына баш ийип, (59) теңдештигин да бузбай турган кайсы бир даражалуу катардын суммасын азырынча $S(x)$ деп деп туралы

$$S(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 +\ \dots + c_n x^n +\ \dots\ . \qquad (60)$$

Анда $\qquad S'(x) = c_1 x + 2c_2 x + 3c_3 x^2 +\ \dots + n c_n x^{n-1} +\ \dots \qquad (61)$

туундусун эсептеп, (60) менен (61) ге (59) теңдештиги орун алат десек,

$$(1 + x)(c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 +\ \dots + n c_n x^{n-1} +\ \dots) =$$

$$= \alpha \cdot (1 + c_1 x + c_2 x^2 +\ \dots + c_n x^n +\ \dots) \quad \text{же}$$

$c_1 + (c_1 + 2c_2)\, x + (2c_2 + 3c_3)\, x^2 + \ \dots + [(n-1)c_{n-1} + nc_n]\, x^{n-1} + \ \dots =$

$= \alpha + \alpha c_1 x + \alpha c_2 x^2 + \ \dots + \alpha c_{n-1} x^{n-1} + \alpha c_n x^n + \ \dots$ келип чыгат. Анын эки тарабындагы кошулуучуларды x тин бирдей даражаларына карата теңдештирип,

$c_1 = \alpha,$

$c_1 + 2c_2 = \alpha c_1,$

$2c_2 + 3c_3 = \ \alpha c_2,$

....

$(n-1)c_{n-1} + nc_n = \alpha c_{n-1},$

$nc_n + (n+1)c_{n+1} = \alpha c_n,$

....

$c_i -$ белгисиз коэффициенттерине карата ($i = 1, 2, 3, \dots, n$, ...) теңдемелердин чексиз системасын алабыз. Мындан белгисиз

$c_1 = \alpha,\ c_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!},\ c_3 = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!},\ \ \dots,\ c_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \dots$

коэффициенттерин аныктап,

$$S(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\,x^3 + \ \dots +$$

$$+ \ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ \dots \qquad (62)$$

көрүнүштөгү даражалуу катарга ээ болобуз. Даламбердин белгиси боюнча (62) катарын жыйналуу радиусу

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{|\alpha-n|} =$$

$= \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\left|\frac{\alpha}{n}-1\right|} = 1$ санына барабар болот. Анда (62) даражалуу катар $\forall x \in (-1,\ 1)$ интервалында же $|x| < 1$ болгондо $S(x)$ суммасына абсолюттук жана бир калыпта жыйналат.

Кийинки кадамда $(-1,\ 1)$ интервалында $S(x)$ суммасын $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ функциясына тең болорун көрсөтөлү. Ал үчүн $S(x)$ менен $f(x)$ тин катышынан турган, кошумча киргизилген

$\varphi(x) = \frac{S(x)}{f(x)} = \frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}}$ функциясын колдонуп салыштыуу жүргүзөлү. $S(x)$ функциясына карата (59) теңдештиги аткарылгандыктан,

$(1+x)S'(x) = \alpha \cdot S(x) \Leftrightarrow S'(x) = \frac{\alpha \cdot S(x)}{1+x}$ теңдештигин пайдаланып, кошумча функциянын туундусун

$$\varphi'(x) = \left(\frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right)' = \frac{S'(x)\cdot(1+x)^{\alpha} - \alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$= \frac{\alpha\cdot S(x)\,(1+x)^{\alpha-1} - \alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{\alpha\cdot S(x) - \alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = \frac{0}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0$ нөлгө тең болорун аныктайбыз $\big(\forall x \in (-1,\ 1)\big)$. Мындан $\varphi(x) = \text{C} - const.$ болору келип чыгып, $x = 0$ чекитинде $\text{C} = \varphi(0) = \frac{S(0)}{(1+0)^{\alpha}} = \frac{1}{1} = 1$ теңдештиги орун аларын көрөбүз. Демек, турактууну $\text{C} = 1$ деп алып

$\forall x \in (-1,\ 1)$: $\varphi(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^{\alpha}} \equiv 1 \Leftrightarrow S(x) = (1+\ x)^{\alpha}$ деп эсептөө жалпылыкты буза албайт жана

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ функциясын $-1 < x < 1$ аралыгында

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ \dots\ +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots \qquad (63)$$

даражалуу катарга ажыратууга болот.

Натыйжа. (63) катарынан $\alpha = -1$ болгондо $(n = 1\ ,2,\ 3,\ \dots)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \dots\ + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ ,\ -1 < x < 1; \qquad (64)$$

Ал эми x ти $-x$ ке алмаштырып

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \dots\ + x^n + \ \dots\ ,\ -1 < x < 1 \qquad (65)$$

даражалуу катарга ажыратууларын алууга болот.

V. $\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x)}$, $\boldsymbol{x} > -1$. Берилген функцияны Маклорендин даражалуу катарына ажыратуу үчүн, анын туундусун

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ көрүнүштө эсептелерин эске алып, $-1 < x < 1$ аралыгында бир калыпта жыйналуучу болгон (64) катарын $[0,\ x]$ кесиндисинде мүчөлөп интегралдасак,

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^t (1 - t + t^2 - t^3 + \ \dots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \ \dots)dt =$$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \dots + \ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ \dots$ келип чыгат.

Ошентип, $-1 < x < 1$ болгондо

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \dots + \ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ \dots \quad (66)$$

ажыралуусу орун алат.

$f(x)$ функциясын Тейлордун ыкмасы менен катарга ажыратууга геометриялык жактан түшүндүрмө берели. $n-$ ченемдүү арифметикалык мейкиндикке таандык болгон $\vec{a}$ векторун, мейкиндиктин ортонормалдашкан $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ базистик системасына карата $\vec{a} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 + \ \dots + c_n\vec{e}_n$ көрүнүштө ажыратып, берилген базиске карата координаталары менен

$\vec{a} = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n\}$ жазууга болорун билебиз. Мында $\{\vec{e}_n\}$ деп OX_n координаталар системасын базистик вектору, ал эми c_n деп $\vec{a}$ векторун OX_n координаттык огуна түшүрүлгөн проекциясы, же болбосо $\{\vec{e}_n\}$ базисине карата $\vec{a}$ векторун координатасы белгиленген. Мындай ажыралыштын жардамы менен вектордун өзүн көрүүгө жана үйрөнүүгө мүмкүн эмес учурларда, векторду кайсы бир координаттык октогу проекциялары боюнча үйрөнүп изилдөө мүмкүнчүлүгү түзүлөт.

$(-R,\ R)$ аралыгында чексиз тартипке чейинки үзгүлтүксүз туундуларга ээ болгон $f(x)$ функцияларын көптүгүн, $C^{\infty}(-R,\ R)$

мейкиндиги деп белгилейли. Ал эми $1,\ x,\ x^2,\ x^3, \dots, x^n, \dots$ чексиз функцияларын ушул мейкиндиктеги базистик система деп алсак, анда даражалуу катардын $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ коэффициенттерин, $f(x)$ функциясын базистик системадагы тиешелүү x^n функцияларына түшүрүлгөн проекциялары деп түшүнүүгө болот ($n = 0, 1, 2, \dots$). Ошентип $f(x)$ функциясын даражалуу катарга алмаштыруу дегенибиз, $f(x)$ ти базистик функциялардын системасынын проекцияларынан кураштырып түзүү болуп эсептелет. Мындай усул, түзүлүү табияты салыштырмалуу татаал функциялардын маанилерин эсептөөгө мүмкүнчүлүк болбой калган учурда, аларды кайсы бир жөнөкөйүрөөк функциялардын чексиз суммасы катарында жазып, керектүү тактыкка чейинки маанилерин жакындаштырып эсептөөгө жол ачкан. Ушундай эсептөө менен, чөйрө кубулуштарын үйрөнүүдө кеңири колдонушка ээ болгон тригонометриялык, көрсөткүчтүү, логарифмдик функциялардын маанилеринин таблицалары түзүлгөн.

Негизги элементардык функцияларды Маклорендин катарына ажыратуу таблицасы

$-\infty < x < +\infty$ аралыгында:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

III. $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$.

$-1 < x < 1$ аралыгында:

IV. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$

$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$;

V. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \dots$;

$$\text{VI.}\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ \dots+\ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ \dots$$

ажырылыштары орун алып, даяр таблица катарында практикалык эсептөөлөрдө колдонулат.

16. Мисалдар

41) $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ көп мүчөсүн $x_0=-1$ чекитинде Тейлордун катарына ажыратып, P(-1,002) жана P(- 0,997) маанилерин 0,001 тактыкка чейин эсептегиле.

► Тейлордун коэффициенттерин $c_n=\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$ формуласы боюнча табалы: $c_0=\frac{P^{(0)}(x_0)}{0!}=\frac{P^{(0)}(-1)}{0!}=8$,

$$c_1=\frac{P'(-1)}{1!}=(x^3+3x^2-2x+4\,)'_{x=-1}=-5\,,$$

$$c_2=\frac{P''(-1)}{2!}=\frac{\left(x^3+3x^2-2x+4\right)''_{x=-1}}{2}=\frac{0}{2}=0\,,$$

$$c_3=\frac{P'''(-1)}{3!}=\frac{\left(x^3+3x^2-2x+4\right)'''_{x=-1}}{6}=\frac{6}{6}=1\,.$$

Демек, көп мүчө $P(x)=8-5(x+1)+(x+1)^3$ көрүнүштөгү Тейлордун катарына ажырайт. Анын маанилерин эсептейли :

$$P(-1{,}002)=8-5\cdot(-1{,}002+1)+(-1{,}002+1)^3=8+5\cdot 0{,}002-$$
$$-0{,}002^3\approx 8{,}010;$$

$$P(-\,0{,}997)=8-5\cdot(-0{,}997+1)+(-0{,}997+1)^3=8-5\cdot 0{,}003+$$
$$+0{,}003^3\approx 7{,}985\,.$$ ◄

42) $y=\sin\frac{\pi x}{4}$ функциясын $x_0=2$ чекитин айланасында Тейлордун катарына ажыраткыла.

► Берилген функцияны $\sin\frac{\pi x}{4}=\sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=\sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right]$

$=cos\ \frac{\pi}{4}(x-2)$ көрүнүшкө өзгөртүп жазууга болот.

$-\infty < \frac{\pi}{4}(x-2) < \infty \Leftrightarrow \ -\infty < x < \infty$ болгондо, (58) формуланы колдонуп,

$$\sin\frac{\pi x}{4} = cos\ \frac{\pi}{4}(x-2) = 1 - \frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4 \cdot 4!} - \ \dots +$$

$+\ (-1)^n \frac{\pi^{2n}(x-2)^{2n}}{4^{2n} \cdot 2n!} + \ \dots, -\infty < x < \infty$ ажыралышына ээ болобуз.

Экинчи бир ыкма менен, берилген $\sin\frac{\pi x}{4}$ функциясын n –тартипке чейинки туундуларын таап, Тейлордун коэффициенттерин $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \left.\frac{\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{(n)}}{n!}\right|_{x=2}$ формуласы менен аныктап, түзүлгөн даражалуу катар да ушундай эле көрүнүштө жазыларын өз алдыңарча текшерип көрсөңөр болот. ◄

43) $\frac{1}{x^2-3x+2}$ функциясын x тин даражалары боюнча катарга ажыраткыла.

► Берилген функцияны

$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)}$ көрүнүшкө өзгөртүп түзүп, айырманын ар бирин өз өзүнчө катарга ажыратабыз ((65) ти кара):

$|x| < 1$ болгондо $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \dots + x^n + \ \dots,$

$\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ болгондо $\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ \dots + \frac{x^n}{2^n} + \ \dots\ .$

Анда $|x| < 1$ жана $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ аралыктарын кесилишинде же $|x| < 1$ болгондо, $\frac{1}{x^2-3x+2} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ \dots + x^n + \ \dots -$

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ \dots + \frac{x^n}{2^n} + \ \dots\right) = \frac{1}{2} + \frac{2^2-1}{2^2}x + \frac{2^3-1}{2^3}x^2 + \ \dots +$$

$+\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}x^n + \ \dots$ катарына ажырата алабыз.◄

44) $y = arctg\, x$ функциясын даражалуу катарга ажыраткыла.

► Туундунун $(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$ таблицасын пайдаланып, $|x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ болгондо (64) боюнча

$(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ ... + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \ ...$ ажыралышына ээ болобуз. Аны $|x| < 1$ шартын бузбай интегралдап

$$arctg\,x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ ... + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + \ ...)dx =$$

$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ ...$ ажыралышына табабыз.◄

45) $\arcsin x$ функциясын $x_0 = 0$ чекитинин чеке белинде Тейлордун катарына ажыраткыла.

► $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = [1 + (-x^2)]^{-\frac{1}{2}}$ туундусун эсептеп, (63) формулага $\alpha = -\frac{1}{2}$, ал эми x тин ордуна "$-x^2$" маанилерин койсок, анда $|-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ болгондо

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 - \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^6 + \ ...$ ээ болобуз. Аны мүчөлөп интегралдап, берилген функцияны $-1 < x < 1$ аралыгында $R = 1$ болгон

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2\,dt + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\int_0^x t^4\,dt + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\int_0^x t^6\,dt + \cdots =$$

$$= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2\cdot 3}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!\cdot 2^3\cdot 7}x^7 + \ ...$$

даражалуу катарга ажыратабыз.◄

46) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ интегралын эсептегиле.

► $-\infty < t < \infty$ аралыгыгында

$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ ... + (-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ ...$ ажыралышын колдонуп, интегралдык синус деп аталуучу берилген интегралды

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots}{t} dt =$$

$$= \int_0^x \left[1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots\right] dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)! \cdot (2n+1)} + \ldots$$

жыйналуу аймагы $-\infty < x < \infty$ аралыгы болгон даражалуу катар сыяктуу эсептейбиз.◄

47) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2(tg\, x - \sin x) - x^3}{x^5}$ пределин Маклорендин ажыралышын пайдаланып эсепегиле.

► Предел алдындагы туюнтманы

$$\frac{2(tg\, x - \sin x) - x^3}{x^5} = \frac{2\sin x - 2\sin x \cos x - x^3 \cos x}{x^5 \cos x} = \frac{2\sin x - \sin 2x - x^3 \cos x}{x^5 \cos x}$$

көрүнүшкө өзгөртүп түзүп, $x_0 = 0$ чекитинин чеке белинде синус, косинус функцияларын Маклорендин катарына ажыралышын пайдалансак, алымында

$$2\sin x - \sin 2x - x^3 \cos x = \left(2x - \frac{2\,x^3}{6} + \frac{2\,x^5}{120} - \frac{2\,x^7}{5040} + \ldots\right) -$$

$$-\left(2x - \frac{8\,x^3}{6} + \frac{32\,x^5}{120} - \frac{128\,x^7}{5040} + \ldots\right) - \left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{24} - \frac{x^9}{720} + \cdots\right) =$$

$= \frac{1}{4}\, x^5 - \frac{1}{60}\, x^7 + \ldots$, бөлүмүндө

$x^5 \cos x = x^5 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) = x^5 - \frac{x^7}{2!} + \frac{x^9}{4!} - \ldots$ келип чыгат. Анда берилген предел

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2(tg\, x - \sin x) - x^3}{x^5} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4} x^5 - \frac{1}{60} x^7 + \ldots}{x^5 - \frac{x^7}{2!} + \frac{x^9}{4!} - \ldots} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{60} x^2 + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots} = \frac{1}{4}$ көрүнүштө эсептелет. ◄

§ 14.7 Фурьенин катарлары

14.7.1 Квадраты менен интегралдануучу функциялар

14.5 Аныктама. *Эгерде* $f(x)$ *функциясынан* $X = [a,\ b]$ *көптүгү боюнча алынган*

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \text{ чектүү интегралы жашаса, анда } f(x) \text{ функциясын } [a, b]$$

кесиндисинде квадраты менен интегралдануучу функция деп, берилген кесиндиде квадраты менен интегралдануучу бардык функциялардын көптүгүн $L_2[a,\ b]$ *мейкиндиги деп атайбыз.*

$[a, b]$ кесиндисинде квадраты менен суммалануучу функциялар, ушул кесиндиде интегралдануучу болушат, б.а. $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралы чектүү мааниге ээ болот.

14.6 Аныктама. *Ар кандай эки* $\forall\, f(x), \varphi(x) \in L_2[a,\ b]$ *функцияларын скалярдык (сандык)көбөйтүндүсү деп,*

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx \qquad (67)$$

интегралын мааниси болгон санды айтабыз. Эгерде интегралдын мааниси нөл $(f, \varphi) = 0$ *санына барабар болсо, анда* $f(x)$ менен $\varphi(x)$ *функцияларын ортогоналдык функциялар дейбиз (жалпы учурда интеграл Лебеганын маанисинде алынат).*

Киргизилген (67) скалярдык көбөйтүү эрежесине таянып, $L_2[a,\ b]$ мейкиндигинин элементтерин тартиптештирүүгө болот. Мындай тартиптештирүү, $L_2[a,\ b]$ мейкиндигин элементтерин пайдаланып, сандар сыяктуу кеңири ченөө, саноо, чоңдуктарды баалоо иштерин жүргүзүүгө мүмкүнчүлүк түзө албайт. Ошондой болсо да, квадраты менен суммалануучу же $L_2[a,\ b]$ нын элементтери болгон функциялар менен моделдештирип жазылган, кайсы бир кубулуштардын өзгөрүү абалдарын баалап-изилдөөгө, аралыктары менен чоңдуктарын ченеп, математикалык тилде таанып үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк алабыз.

Векторлорду скалярдык көбөйтүүсүндөй эле, (67) скалярдык көбөйтүү эрежеси

1) $(f,\ \varphi) = (\varphi,\ f)$;

2) $(f_1 + f_2,\ \varphi) = (f_1,\ \varphi) + (f_2,\ \varphi),\ \forall\, f_1, f_2, \varphi \in L_2[a,\ b]$;

3) $(\alpha f,\ \varphi) = \alpha(f,\ \varphi), \alpha \in R$;

4) Эгерде $f \neq 0$ ⇨ скалярдык квадрат $(f,\ f) > 0$

касиеттерине ээ болору, интегралдын касиеттеринен келип чыгат.

14.7 Аныктама. $L_2[a,\ b]$ *мейкиндигинде берилген*

$\forall\, f(x) \in L_2[a,\ b]$ *функциясын нормасы деп* $\|f(x)\|$ *символу менен белгиленип,*

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \qquad (68)$$

эрежеси менен эсептелген санды, ал эми ар кандай эки

$\forall\, f, \varphi \in L_2[a,\ b]$ *функцияларын арасындагы аралык деп,*

$$\rho(f, \varphi) = \|f - \varphi\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx} \qquad (69)$$

санын айтабыз. Ал эми $\|f - \varphi\|^2 = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$ *чоңдугун, (санын)* f *менен* φ *функцияларын бири – биринен орточо квадраттык четтөөсү дейбиз.*

$L_2[a,\ b]$ мейкиндигинде киригизилген (69) аралыкты ченөө (метрика) эрежеси же же аралык эрежеси, метрикага коюлган (1 – бөл., §1.2) аксиомаларды канааттандыргандыктан, (69) “аралык” эрежесине карата $L_2[a,\ b]$ мейкиндиги, бардык пределдик чекиттерин крамап турган толук метрикалык мейкиндик болот.

Ошентип скалярдык көбөйтүүнүн жардамы менен $L_2[a,\ b]$ мейкиндигинде (69) – “аралык” эрежесин киргизип, берилген мейкиндиктин элементтерин бири – биринен орточо квадраттык

четтөөлөрүнө жараша, алардын ар бири сүрөттөгөн кубулуштарды өз өзүнчө айырмалап таанып, баалап бир маанилүү үйрөнө алабыз.

Мисал. 48) $f(x) = x,\ \varphi(x) = x^2$ функциялары $[-1,\ 1]$ кесиндисинде скалярдык көбөйтүүнүн (67) эрежесине карата ортогоналдык болушат

$$\int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0\,.$$

14.7.2 $L_2[a,\ b]$ мейкиндигиндеги ортогоналдык системалар боюнча Фурьенин катарларын түзүү

14.8 Аныктама. *$L_2[a,\ b]$ мейкиндигинде берилген $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$ функциялардын чексиз системасын каалагандай экөөсү өз ара ортогоналдуу болушса*

$$\forall i, j \in N, i \neq j: \left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x)\, dx = 0\,, \qquad (70)$$

анда аларды $L_2[a,\ b]$ мейкиндигин ортогоналдык системасы дейбиз. Ортогоналдык системаны мейкиндиктин базистик системасы катарында алууга болот.

Айталы, $L_2[a,\ b]$ мейкиндигинде кандайдыр бир $\{\varphi_n\}$ ортогоналдык системасы берилсин, ал эми $f(x)$ функциясы ушул мейкиндиктен алынган эркин функция болсун. Бул учурда, $[a,\ b]$ кесиндисинде $f(x)$ ти, $\left\{\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}\right\}$ ортонормалдашкан базистик системага карата, төмөндөгүдөй көрүнүштөгү катарга ажыралуусу:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \varphi_n \qquad (71)$$

Фурьенин катары деп аталат. Мында Фурьенин коэффициенттери деп аталган c_n саны, ортонормалдашкан $\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}$ функциялары менен f функциясын скалярдык көбөйтүндүсү аркылуу аныкталышат

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}(f, \varphi_n) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)dx\,, \qquad \|\varphi_n\|^2 = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx. \quad (72)$$

Ошентип, $L_2[a,\ b]$ мейкиндигиндеги $f(x)$ функциясын, алынган ар кандай базистик системаларга карата ар башка көрүнүштөгү (71) сыяктуу Фурьенин катарларына ажыратууга болот.

14.7.3 $L_2[-\pi,\ \pi]$ мейкиндигиндеги тригонометриялык ортогоналдык системага карата Фурьенин катары

$[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде квадраты менен суммалануучу $\{\cos nx\,, \sin nx\}$:

$$(1, 0),\ (\cos x\,, \sin x),\ (\cos 2x\,, \sin 2x), \dots, (\cos nx\,, \sin nx), \dots \qquad (73)$$

тригонометриялык функциялардын системасы берилсин. Берилген аралыкта $\cos nx$ менен $\sin nx$ тин квадраттарынан интеграл алып,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \cos^2 nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\, dx =$$

$$= \left(x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi; \qquad (74)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \sin^2 nx\, dx = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2}\, dx =$$

$= \left(x - \frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi\,,$ алардын $L_2[-\pi,\ \pi]$ мейкиндигине таандык, же квадраты менен суммалануучу функциялар болорун көрөбүз жана нормалары

$\forall n \geq 1$: $\|\varphi_n\| = \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$ санына, ал эми $n = 0$ болгондо $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$ $\qquad (*)$

$\Rightarrow \|\varphi_0\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\ dx} = \sqrt{2\pi}$ санына барабар болушат.

Берилген (73) тригонометриялык системаны (70) эрежеси боюнча скалярдык көбөйтүп, интегралдарын эсептеп

$$n \neq m \;\Rightarrow\; \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\, dx = 0\,,$$

$$n \neq m \;\Rightarrow\; \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin(n-m)\pi + \sin(n-m)\pi}{n-m} -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sin(n+m)\pi + \sin(n+m)\pi}{n+m} = \frac{1}{2}\,\frac{0+0}{n-m} - \frac{1}{2}\,\frac{0+0}{n+m} = 0,$$

$$\forall n, m\colon \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n-m)x - \sin(n+m)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+m)x}{n+m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

алардын $L_2[-\pi,\ \pi]$ мейкиндигине ортогоналдык система болорун көрөбүз.

$n = m$ болгон учурда $\cos nx$ жана $\sin nx$ функцияларын скалярдык квадраттары (74) көрүнүштөрдө эсептелет, ал эми

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx \, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2n\,x}{2n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

болот.

(73) тригонометриялык ортогоналдык системасын

нормалдаштырып $\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}$: $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\,,\ \ n = 1, 2, 3, \dots\ ,$ (75)

ортонормалдаштырылган функцияларын тобунан турган $L_2[-\pi,\ \pi]$ мейкиндигин (75) базистик системасын түзөбүз. Анда түзүлгөн базистик системага карата квадраты менен суммалануучу

$\forall f(x) \in L_2[-\pi,\ \pi]$ функциясын, (71) сыяктуу Фурьенин катарына ажыратууга болот. 1, $\cos nx$, $\sin nx$ функцияларына туура келген Фурьенин коэффициенттерин тиешелүү түрдө $\frac{a_0}{2}$, a_n, b_n деп белгилеп, аларды (72) формуласы боюнча

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\|\varphi_0\|^2}(f, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \text{ же } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,;$$

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}(f, \varphi_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, n = 1, 2, 3, \ldots; \qquad (76)$$

$$b_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2}(f, \varphi_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,, n = 1, 2, 3, \ldots$$

көрүнүштөрдө аныктайбыз. c_0 коэфициентин $\frac{a_0}{2}$ деп алганыбыздын себеби, (73) системанын $n = 0$ болгондо синус жарымын $(*)$ нөл болуп калгандыгын эске алуу болуп эсептелет.

Ошентип, $L_2[-\pi,\ \pi]$ толук метрикалык мейкиндигиндеги бардык $f(x)$ функцияларын $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде, (75) тригонометриялык ортонормалдашкан базистик системага карата

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \qquad (78)$$

$f(x)$ функциясына бир калыпта жыйналуучу Фурьенин тригонометриялык (78) катарына ажыратууга болот.

14.7.4 Фурьенин тригонометриялык катарына ажыроо шарттары

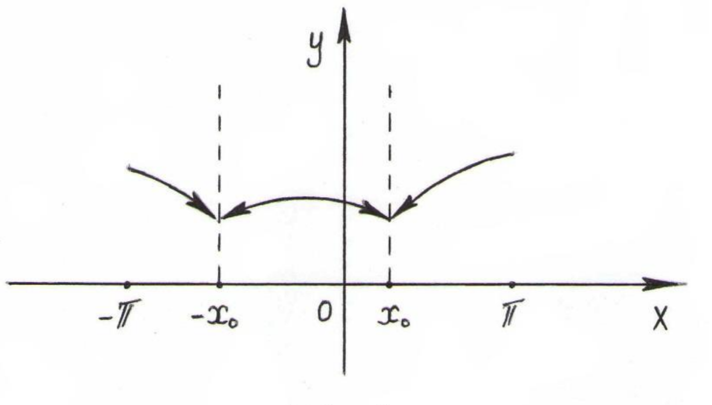
Фурьенин катарын Тейлордун катарынан жана башка катарлардан кандай айырмачылыгы бар? Функцияларды Фурьенин катарына ажыратуунун кандай зарылчылыгы бар жана кандай шарттарда функцияны Фурьенин катарына ажыратууга болот? – деген сыяктуу суроолор туулбай койбойт.

Математикада чөйрө кубулуштары, кандайдыр бир функциялар жана алар катышкан туюнтмалар аркылуу моделдештирирели белгилүү. Ошондуктан, кубулуш жүрүп жаткан чөйрөгө шайкеш болгон көптүктөрдө аныкталган функция – моделдерин түзүүгө жана алардын сандык маанилерин эсептөөгө туура келет. Бирок түзүлгөн функция –

моделди кайсы бир такталган чекиттердеги маанилерин эсептөөгө жана жүрүм турумун аныктоого кыйынчылык жаралган учурлар кездешет. Эгерде функция – модел ошол такталган чекиттерде берилген бир даяр катардын суммасы болсо, анда катардан керектүү тактыкка чейинки кошулуучуларды алып, анын суммасын эсептөө менен коюлган тапшырманы аткарууга болот. Эгерде берилген мындай даяр катар жок болсо, анда ошол такталган чекиттерде функция – моделди жасалма жол менен катарга ажыратууга туура келет. Мындай жасалма катарлардын бири Тейлордун катары болуп эсептелип, $x \in (-R,\ R)$ интервалында чексиз тартипке чейин чектүү туундулары жашаган $f(x)$ функция – моделин, $\{x^n\}-$ функцияларын системасы аркылуу, тиешелүү коэффициенттери $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ болгон чексиз сумма катарында курaштырылат.

Эгерде, биринчиден биздин изилдөөгө керектүү чекиттер $(-R,\ R)$ интервалына таандык болбосо, экинчиден кубулушка шайкеш аралыкта түзүлгөн функция – моделдин чексиз тартипке чейинки туундулары жашабай калса, анда Тейлордун ыкмасы менен керектүү чекиттердеги маалыматтарды үйрөнүү мүмкүн эмес. Үчүнчүдөн $\{x^n\}$ функциялары дайыма эле чектүү боло бербей, алардан $f(x)$ функциясын курaштырып түзүү татаалчылыкты жаратат (мисалы $|x| > 1$ болгондо).

Фурьенин ыкмасы айтылган кемчилдиктерди аттап өтүп, катарларга ажыратуу ыкмасын колдонуу мүмкүнчүлүгүн кеңейтет.



14.3-чийме

1. $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде интегралдануучу болгон функциялардын бардыгы эле квадраты менен интегралдануучу боло бербегени менен, кесиндидеги чектүү сандагы чекиттерде I – түрдөгү үзүлүшкө ээ болгон бөлүкчө – монотондуу функцияларды да, үзүлүү чекиттеринде кошумча аныктап Фурьенин катарына ажыратууга болот.

2. Фурьенин катарында функциялардын $\{\cos nx, \sin nx\}$ системасы чектелген, б.а. 1 ден ашып кетишпейт жана улам кайталанган мезгилдүү функциялар болушуп, түзүлүү табыяты гармоникалык термелүү мүнөзүнө ээ болгон көпчүлүк жартылыш кубулуштарына үндөш болот. Ошондуктан $f(x)$ функциясын, табыяты боюнча кубулуштардын өзгөрүү процессине жакын болгон функциялардын системасы аркылуу туюнтуу, практикалык маселелерди чечүүгө жеңилдик алып келет.

3. $f(x)$ функциясын жасалма түрдө $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде $\mathrm{T} = 2\pi$, же эркин тандалган $[a,\ a + \mathrm{T}]$ кесиндисинде T мезгилдүү функция деп эсептеп ($a -$ эркин алынган сан), аны улам T аралыгына узартып олтуруп бүтүндөй $(-\infty,\ \infty)$ сан огу боюнча маалымат алуучу функция – модел катарында пайдаланууга да болот. Бул учурда Фурьенин катарын тикелей суммасы $f(x)$ деп эсептөөгө болбойт, анткени мезгилдүү эмес функциянын аныкталуу областы, жасалма жол менен сан огуна узартылды, ошондуктан бул учурда ”Фурьеге эквиваленттүү” $\left(f(x)\ \sim\ \sum c_n\varphi_n\right)$ белгилөөсү киргизилет.

Фурьенин катарына ажыроо шарттары

$\mathbf{1^0}$. $f(x)$ функциясын $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде Фурьенин тригонометриялык катарына ажыратуу үчүн $\forall f(x) \in L_2[-\pi,\ \pi]$ болушу жетиштүү.

$\mathbf{2^0}$ (экинчи бир жетиштүү шарт). $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде $f(x)$ функциясы $\mathrm{T} = 2\pi$ мезгилдүү, бөлүкчө – монотондуу жана чектелген функция болуп, кесиндинин чектүү сандагы x_0 чекиттеринде I – түрдөгү гана үзүлүү чекиттерине ээ болсо, анда аны Фурьенин катарына ажыратууга болот (14.3 – чийме). Бирок бул учурда катар, $f(x)$ функциясына эквивлеттүү гана болот

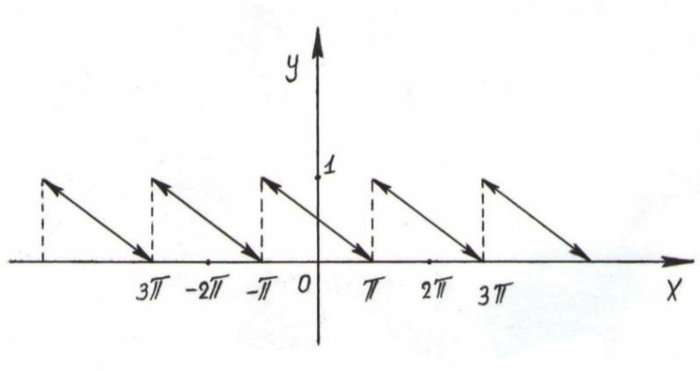
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

анткени катардын суммасы үзүлүү чектттеринде кошумча аныкталган

$$S(x) = \begin{cases} f(x), \text{эгерде } x \text{ чекитинде } f(x) \text{ үзгүлтүксүз болсо,} \\ \dfrac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)], \qquad x_0 \text{ үзүлүү чекитинде,} \\ S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)] \text{ учтарында} \end{cases}$$

функциясына теӊ болот

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,.$$



14.4-чийме

Мында $f(x_0+0)$ деп, функциянын x_0 үзүлүү чекитиндеги оӊ жактуу, ал эми $f(x_0-0)$ сол жактуу пределдери болушса, аралыктын сол учундагы оӊ жактуу предел $f(-\pi+0)$, оӊ учундагы сол жактан жакындаган предел $f(\pi-0)$ көрүнүштөрдө белгиленишкен.

17. Мисалдар

49) $(-\pi,\ \pi)$ интервалында мезгили 2π болгон $f(x) = \pi - x$ функциясын Фурьенин катарына ажыраткыла (14.4 – чийме).

► Каралган аралыкта $f(x)$ функциясы $2^0 -$ шартты канааттандырат, ошондуктан аны Фурьенин катарына ажыратууга болот. Фурьенин коэффициенттерин табалы

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{(\pi-x)^2}{2\pi}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\ = 0 - \frac{\cos nx}{\pi n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

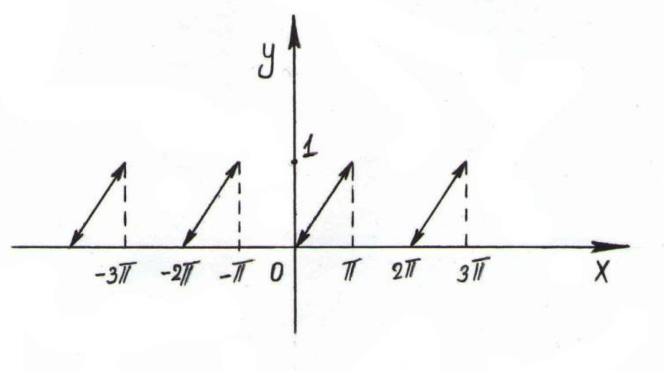
$$= \frac{\cos(-n\pi) - \cos(n\pi)}{\pi n^2} = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \dots ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - x) d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx \; = \frac{2\pi}{\pi n}\cos(-n\pi) - \frac{\sin nx}{\pi n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n}\cos(n\pi) - 0 = 2\frac{(-1)^n}{n}, \qquad n = 1\,, 2, 3, \dots \,.$$

Анда Фурьенин катары



14.5-чийме

$$\pi - x = \pi + 2\sum_{n}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n},$$
$$-\pi < x < \pi$$

көрүнүштө болот. ◄

50) $(-\pi,\ \pi)$ интервалында

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ эгерде } -\pi < x < 0 \text{болсо,} \\ x \text{ эгерде } 0 \le x < \pi \text{ болсо} \end{cases}$$

функциясын Фурьенин катарына ажыраткыла (14.5 – чийме).

► Берилген функция $2^0 -$ шарттарына баш ийгендиктен, аны Фурьенин катарына ажырата алабыз. Интегралдын аддитивдүүлүк касиетине таянып

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2\pi}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\;\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = 0+\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - \cos 0}{\pi n^2} =$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n^2}, n = 1, 3, 5, \ldots \text{ так болсо,} \\ 0, \quad n = 2, 4, 6, \ldots \text{ жуп болсо;} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xd\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{\sin nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi} =$$

$= \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ коэффициенттерин табабыз.

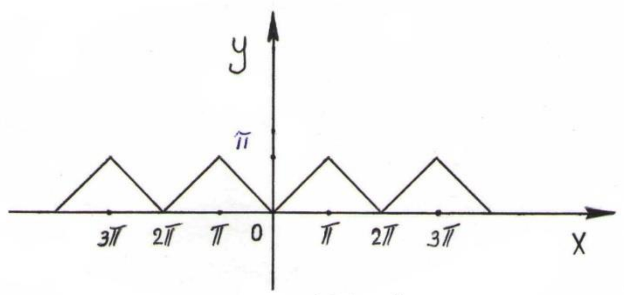
Анда Фурьенин катары

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \left[-\frac{2\cos x}{1^2\cdot\pi} + \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{2\cos 3x}{3^2\cdot\pi} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} - \frac{2\cos 5x}{5^2\cdot\pi} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2\cdot\pi} + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right], n = 1, 2, 3, \ldots$$

көрүнүштө жазылат.

$[-\pi,\ \pi]$ кесиндисин учтарындагы $x = -\pi$, $x = \pi$ чекиттеринде $f(x)$ функциясы I – түрдөгү үзүлүшкө ээ болот, ошондуктан бул чекиттерде катар жөн гана $f(-\pi) = f(\pi) = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ саны болуп эсептелет.◄



14.6-чийме

51) $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде аныкталган $f(x) = |x|$ функциясын $T = 2\pi$ мезгилине ээ деп алып, Фурьенин катарына ажыраткыла (14.6 – чийме).

► Берилген функция $x_0 = 0$ чекитинде I – түрдөгү үзүлүшкө ээ болгону менен 2^0 – шарттарына баш ийип, Фурьенин катарына ажырайт.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right] = \pi\ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\ d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\ d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = -\frac{1}{\pi}\ \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx\,dx}{n} + \frac{1}{\pi}\ \frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx\,dx}{n} = 0 - \frac{1}{\pi}\ \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} + 0 + \frac{1}{\pi}\ \frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi\,n^2}[-\cos 0 + \cos n(-\pi) + \cos n\pi - \cos 0] = \frac{1}{\pi\,n^2}[-2 + 2\cos n\pi] =$$

$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi\,n^2}\,,$$

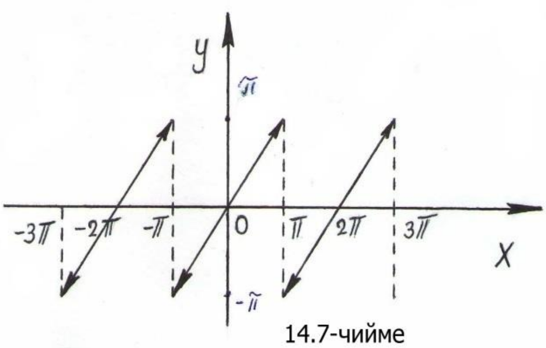
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right] = 0$$

коэффициенттерин аныктап, Фурьенин катарын

$$|x|\ \sim\ \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n - 1]\cos nx}{n^2}, \qquad -\pi < x < \pi$$

көрүнүштө жазабыз (үзүлүү чекитинде $f(0) = |0| = 0$) .◄

52) $f(x) = x$ функциясын $[-\pi\,,\pi]$ кесиндисинде Фурьенин катарына ажыраткыла (14.7 – чийме). ► Фурьенин коэффициенттерин



14.7-чийме

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{x^2}{2\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,d(\sin nx) = \frac{x\sin nx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{n\pi}\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,d(\cos nx) = -\frac{x\cos nx}{n\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx =$$

$= -\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$ таап, катарды

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

көрүнүштө жазабыз, анткени аралыктын учтарында

$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$ ◄

14.7.5 Жуп жана так функциялар үчүн Фурьенин катары

Мисалдарды чыгарууда байкалгандай берилген $[-\pi,\pi]$ аралыгында $f(x)$ так функция (52 – мисалда) болсо $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ коэффициенттери нөл болоруна, ал эми жуп (51 – мисалда) функция болсо $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ коэффициенттери нөл болоруна күбө болдук. Чынында эле симметриялуу $[-a, a]$ аралыгында интегралданууучу болгон $f(x)$ функциясынан алынган (12 – гл, 12.6 – теорема) анык интегралдар төмөндөгүдөй көрүнүштө эсептелери белгилүү:

1) $\forall x \in [-a,a]$: $f(-x) = f(x)$ жуп болсо $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx,$

2) $\forall x \in [-a,a]$: $f(-x) = -f(x)$ так болсо $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\,.$

Ал эми жуп функция менен жуп функциянын көбөйтүндүсү жуп функция, ал эми жуп функция менен так функциянын көбөйтүндүсү так

функция, так функция менен так функциянын көбөйтүндүсү жуп функция болушат. $[-\pi, \pi]$ кесиндисинде $\cos nx$ жуп, $\sin nx$ так функциялар экендигин эске алып, $[-\pi, \pi]$ кесиндисинде (76) формуласы боюнча эсептелүүчү Фурьенин коэффициенттери:

1) $f(x)$ жуп болгондо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (79)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,,$$

2) $f(x)$ так болгондо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,, \qquad (80)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,, n = 1, 2, 3, \ldots$$

көрүнүштөрдө табыларына ишенебиз.

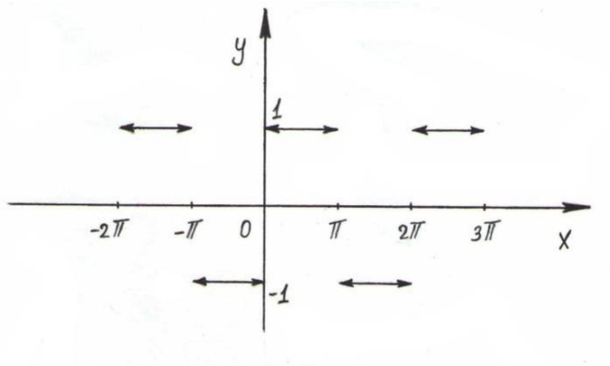
Мисалдар

53) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \text{ болгондо,} \\ 0, & x = -\pi,\ x = 0,\ x = \pi \text{ болгондо,} \\ 1, & 0 < x < \pi \text{ болгондо} \end{cases}$ функциясын $[-\pi, \pi]$ кесиндисинде 2π мезгилдүү функция деп алып, Фурьенин катарына ажыраткыла (14.8 – чийме).

► Берилген симметриялуу аралыкта $f(x)$ так функция болгондуктан, (80) ден $a_0 = 0 = a_n = 0$ болуп,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = -\left.\frac{2\cos nx}{\pi n}\right|_0^{\pi} =$$

$= -\frac{2}{\pi n}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n}[1-(-1)^n]$ көрүнүштө табылат. Анда Фурьенин катарын

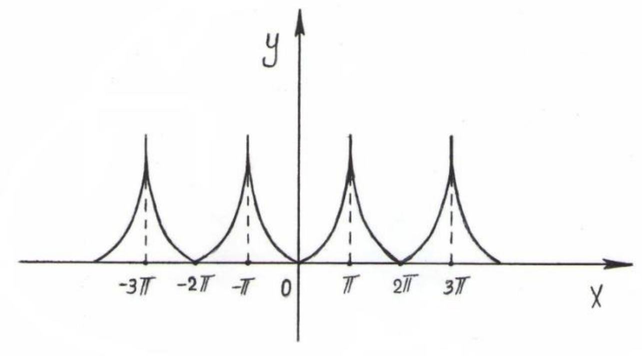


14.8-чийме

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n]\frac{\sin nx}{n}$$

көрүнүштө жазабыз. ◄

54) $[-\pi\,,\pi]$ кесиндисинде $f(x) = x^2$ функциясын Фурьенин катарына ажыраткыла (14.9 – чийме).



14.9-чийме

► Берилген аралыкта $f(x) = x^2$ жуп функция болуп, 2^0 – шартына баш ийип Фурьенин катарына ажырайт. Анда (79) формулалар боюнча $b_n = 0$ болуп,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\frac{d(\sin nx)}{n} = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x\sin nx}{n}dx =$$

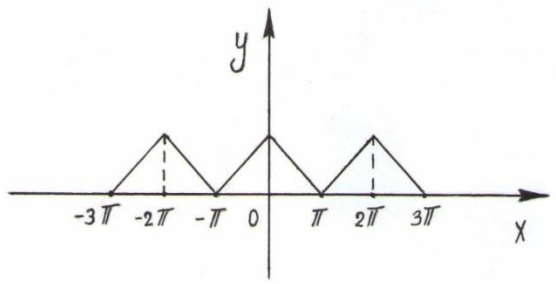
$$= 0 + \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{4}{\pi n}\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,d\,x = \frac{4}{\pi n^2}\cos n\pi -$$

$- \frac{4}{\pi n^3}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{\pi n^2} - 0 = \frac{4(-1)^n}{\pi n^2}$ ээ болобуз. Демек, Фурьенин

катары $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{\cos nx}{n^2}$

көрүнүштө болот, анткени аралыктын учтарында

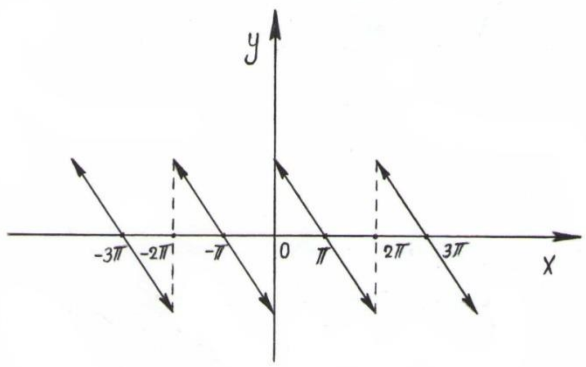
$f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2+\pi^2}{2} = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ аткарылат. ◄



14.10-чийме

14.7.6 Функцияларды синустар же косинустар боюнча катарга ажыратуу

Айталы бөлүкчө – монотондуу $f(x)$ функциясы $[0,\ \pi]$ кесиндисинде берилсин, анда мындай функцияны $[-\pi,\ 0]$ кесиндисине жасалма узартып, жаңыдан түзүлгөн функцияны $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде аныкталган функция катары Фурьенин катарына ажыратууга болот. Мындай жасалма функцияны $f(x)$ жуп болгондой



14.11-чийме

$f(-x) = f(x)$ мүнөздө түзсөк, анда Фурьенин катары косинустар боюнча ажырайт, ал эми так болгондой $f(-x) = -f(x)$ мүнөздө түзсөк, синустар боюнча ажырайт. Мисалы,

55) $f(x) = \pi - x,\ 0 \leq x \leq \pi$ функциясын а) косинустар; б) синустар боюнча катарга ажыраткыла.

► а) $[-\pi,\ 0]$ кесиндисинде $f(x)$ жуп болгондой узарталы (14.10 – чийме), анда симметриялуу $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде $b_n = 0$ болуп,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx = -\frac{1}{\pi}(\pi - x)^2\Big|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{2}{\pi}(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = 0 - \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(1 - \cos n\pi) = \frac{2}{\pi n^2}[1 - (-1)^n] =$$

$= \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}, n \text{ так болсо,} \\ 0, \quad n \text{ жуп болсо} \end{cases}$ көрүнүштөрдө аныкталат. Анда Фурьенин катары жалаң косинустар боюнча ажырап,

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ \dots\right\}$$ көрүнүштө жазылат.

б) $[-\pi,\ 0]$ кесиндисинде $f(x)$ так болгондой узарталы (14.11 – чийме), анда $a_0 = a_n = 0$ болуп

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)d\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{2}{n}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

келип чыгат. Анда синустар боюнча $0 < x \leq \pi$ үчүн ажыраган

$\pi - x = 2\left\{\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ \dots\right\}$ Фурьенин катарына ээ болобуз ($n = 1, 2, 3, \dots$).◄

14.7.7 $\text{Т} = 2l$ мезгилдүү функцияларды Фурьенин катарына ажыратуу

Айталы, кайсы бир чектүү $l > 0$ санына карата түзүлгөн $[-l,\ l]$ кесиндисинде $\text{Т} = 2l$ мезгилдүү $f(x + 2l) = f(x)$ функциясы берилсин. Анда өзгөрүлмөгө $x = \frac{l}{\pi}t$ алмаштырууcун жүргүзүү менен, $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде $f(x)$ функциясын $F(t) = f\left(\frac{l\,t}{\pi}\right)$ көрүнүштөгү 2π мезгилдүү $F(t)$ функциясына өзгөртүп түзөбүз. Чынында эле 2π саны анын мезгили болорун

$F(t+2\pi) = f\left(\frac{l(t+2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{l\,t}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{l\,t}{\pi}\right) = F(t)$ текшерүүгө болот. Демек, $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде $F(t)$ функциясын Фурьенин катарына ажыратууга болот

$$F(t) = f\left(\frac{l\,t}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt\ . \qquad (81)$$

Мында

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l\,t}{\pi}\right)\cos nt\,dt\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l\,t}{\pi}\right)\sin nt\,dt\,, \qquad n = 1, 2, 3, \dots\ .$$

Кайрадан $t = \frac{\pi x}{l}$ ордуна коюусун жардамы менен x өзгөрүлмөсүнө өтсөк, Фурьенин (81) катары

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (82)$$

көрүнүшкө келип, Фурьенин коэффициенттери

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,, \qquad n = 1, 2, 3, \dots\ .$$

формулалары менен эсептелишет.

Бул учурда $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде $\mathrm{T} = 2\pi$ мезгилдүү функцияларды Фурьенин катарына ажыратуу шарттары жана касиеттери толугу менен, $[-\mathrm{T},\ \mathrm{T}]$ кесиндисинде $\mathrm{T} = 2l$ мезгилдүү функциялардын (82) ажыралуусу үчүн да сакталат.

Мындан сырткары, каалагандай эле Т мезгилдүү $f(x+\mathrm{T})=f(x)$ жана интегралдануучу $f(x)$ функциясын, кандайдыр бир a санына карата $(a>0)$ түзүлгөн $[a,\ a+T]$ кесиндиси боюнча анык интегралын

$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(x)\,dx = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(x)\,dx \qquad (83)$$

көрүнүштө эсептөөгө болорун байкайбыз.

► Чынында эле, интегралдын адитивдүүлүк касиети боюнча

$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(x)\,dx = \int_{a}^{\mathrm{T}} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(x)\,dx$$

ээ болуп, экинчи интегралды

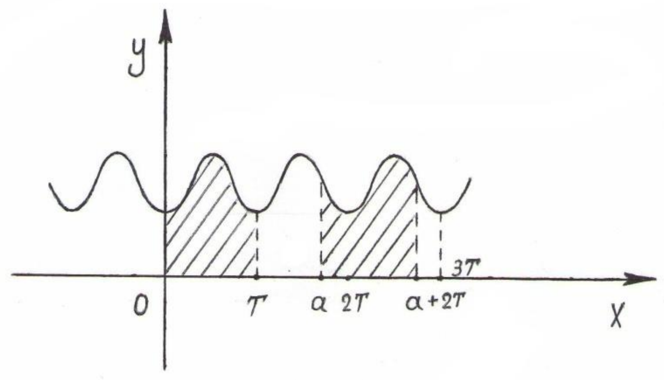
$$\int_{\mathrm{T}}^{a+\mathrm{T}} f(x)\,dx = \left|\begin{matrix} x=t+T \text{ десек,} \\ \text{анда } dx=dt \end{matrix}\right| = \int_{0}^{a} f(t+T)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

көрүнүштө эсептей алабыз. Анда

$$\int_{a}^{a+\mathrm{T}} f(x)\,dx = \int_{a}^{\mathrm{T}} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\mathrm{T}} f(x)\,dx = \int_{0}^{\mathrm{T}} f(x)\,dx$$

(83) түн туура экендиги келип чыгат.◄

Геометриялык жактан (83) ырастоосу, $f(x)\geq 0$ болгон учурда (14.12 – чиймеде) штрихтелип көрсөтүлгөн областтардын аянттарын барабар болушу менен түшүндүрүлөт.



14.12-чийме

Мисалы, $f(x)=sin^7x$ функциясынан кандайдыр бир $a,(a>0)$ санына карата түзүлгөн $[a,\ a+T]$ жана $[0,\ 2\pi]$ кесиндилери боюнча интеграл алып көрөлү.

Берилген функция мезгили 2π болгон так функция, анда

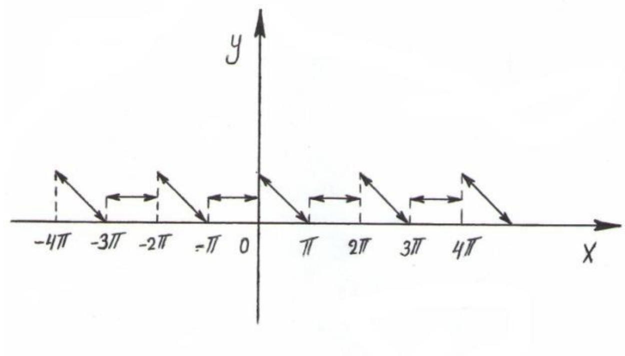
$$\int_{a}^{a+T} sin^7 x\,dx = \int_{0}^{2\pi} sin^7 x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} sin^7 x\,dx = 0$$

эсептеп көрүп, a саны кандай болсо да, бир $sin^7 x$ функциясынан эки башка кесиндилер боюнча алынган интегралдардын тең болорун, б.а. (83) аткарыларын көрөбүз. Мындан $T = 2l$ мезгилдүү функцияларды $[a,\ a+T]$ кесиндисинде Фурьенин катарына ажыратууда, Фурьенин коэффициенттерин

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots\,,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \qquad (84)$$

формулалары менен эсептөөгө болору келип чыгат.



14.13-чийме

56) 2π мезгилдүү деп алынган $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < \pi \text{ болсо,} \\ 1, & \pi < x < 2\pi \text{ болсо} \end{cases}$

функциясын $(0,\ 2\pi)$ интервалында Фурьенин катарына ажыраткыла (14.13 – чийме).

► $a = 0,\ l = \pi$ деп, (84) формулалардын жардамы менен Фурьенин коэффициенттерин табалы

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1\cdot dx\right] = \frac{\pi + 2}{2}\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} \cos nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx \;+ 0 = \begin{cases} \dfrac{2}{n^2\pi}\,, n = 1, 3, \ldots - \text{так болсо,} \\ 0, \quad n = 1, 3, \ldots - \text{жуп болсо,} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}(\pi - x)\;\sin nx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi}\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi}(\pi - x)\,d\left(\frac{\cos nx}{n}\right)dx - \frac{\cos nx}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi - x}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n} + \frac{(-1)^n - 1}{n}\right] = \frac{1}{\pi n}[\pi + (-1)^n - 1] =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi-2}{n\pi}\,, \;\; n = 1, 3, 5, \ldots \text{болгондо,} \\ \frac{1}{\pi n}\,, \;\; n = 2, 4, 6, \ldots \;\text{болгондо}\,. \end{cases}$$

Демек Фурьенин катарын $(0,\ 2\pi)$ интервалында

$$f(x) \sim \frac{\pi+2}{4} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\pi-2}{\pi}\cdot\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\pi-2}{\pi}\cdot\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ \ldots$$

көрүнүштө жазууга болот. I – түрдөгү $x_0 = \pi$ үзүлүү чекитинде

$f(x_0) = \frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ орун алат. ◄

14.7.8 Фурьенин катарын комплекстик жазылышы

Айталы, $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде аныкталган $f(x)$ функциясы 2^0 шартына баш ийип, Фурьенин катарына ажырасын

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,. \qquad (85)$$

Комплекстик сандарды (1 – бөл., §1.4) көрсөткүчтүү жана тиригонометриялык жазылыштарын байланыштырган Эйлердин формуларын колдонуп, жазылган

$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx,\;\; e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx$ теңдештиктерин мүчөлөп кошуп жана мүчөлөп кемитип $\cos nx = \frac{e^{inx} + \; e^{-inx}}{2}$ жана

$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = i\frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}$ теңдештик формулаларына ээ болобуз.

Орнотулган теңдештик формулаларындагы $\cos nx$, $\sin nx$ тин маанилерин (85) катарга коюп, аны

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + ib_n\frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right)$$

көрүнүштө жазабыз. Жаңы $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ белгилөөлөрүн киргизип, акыркы катарды

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

абалына өзгөртөбүз. Бул теңдештиктин оң жагындагы кошулуучулардын суммасын, суммаларды кошууга өзгөртүп жазып

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n} e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty}c_n e^{inx},$$

Фурьенин (85) катарын комплекстик формадагы

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx} \qquad (86)$$

жазылышына ээ болобуз.

c_n жана c_{-n} коэффициенттерин Фурьенин a_n, b_n коэффициенттери аркылуу туюнткан интегралдык формулаларды келтирип чыгаралы

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx - i\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}dx \ ,$$

ушундай эле ыкма менен

$$\text{c}_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \ ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{inx}dx \ \text{ табабыз } .$$

Жалпы учурда Фурьенин комплекстик коэффициенттерин

$$\text{c}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-inx}dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

формуласы менен эсептөөгө болот.

$[-\text{T},\ \text{T}]$ кесиндисинде $\text{T} = 2l$ мезгилдүү $f(x)$ функцияларын Фурьенин катарына ажыралуусу комплекстик формада

$$f(x) = \text{c}_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{c}_n\,e^{i\frac{n\pi x}{l}} \qquad (87)$$

көрүнүштө жазылып, коэффициенттери

$$\text{c}_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ формулалары менен}$$

эсептелет.

Комплекстик формадагы (86), (87) Фурьенин катарларын жыйналуучу болушу үчүн, алардын $"-n"$ ден $"+n"$ ге чейинки мүчөлөрүн суммаларынын чектүү болушу же

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} \text{c}_k\,e^{ikx} < \infty \ , \ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} \text{c}_k\,e^{i\frac{n\pi x}{l}} < \infty \ \text{ пределдерин чект}\gamma\gamma$$

маанилеринин жашашы жетиштүү.

Мисал. 57) $[-\pi,\ \pi]$ кесиндисинде $\mathrm{T} = 2\pi$ мезгилдүү деп алынган $f(x) = \begin{cases} 0\ , -\pi < x < 0 \text{ болсо,} \\ 1,\ \ 0 < x < \pi \text{ болсо} \end{cases}$ функциясын комплекстик формадагы Фурьенин катарына ажыраткыла.

► Берилген функция Фурьенин катарына ажыратуунун 2^0 шартына баш ийгендиктен, аны Фурьенин катарына ажыратууга болот. Анда Фурьенин комплекстик формадагы коэффициенттерин да аныктай алабыз

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\, e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}dx\right] =$$

$$= 0\ +\ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{in}e^{-inx}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1-e^{-in\pi}}{2\pi ni} =$$

$$= \frac{1-\cos(-n\pi)+isin\,(-n\pi)}{2\pi ni} = \frac{1-\cos n\pi}{2\pi ni} + i\cdot\frac{(-1)^n-1}{2\pi n} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{i}{\pi n}\ ,\ \ n \text{ так болсо,} \\ \ 0\ ,\ \ n \text{ жуп болсо .} \end{cases}$$ Мындан $c_{2n-1} = -\frac{i}{\pi(2n-1)}$ жана $c_{2n} = 0$ болору келип чыгып, Фурьенин комплекстик формадагы катары

$$f(x)\ \ \sim\ \ \begin{cases} -\frac{i}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\,(2n-1)x}}{2n-1}\ \ , -\pi < x < 0, \qquad 0 < x < \pi\ ; \\ \qquad f(0) = \ \frac{1}{2}, \qquad x = 0 \text{ болсо} \end{cases}$$

көрүнүшүндө жазылат ($x = 0$ үзүлүү чекити) . ◄

Көнүгүүлөр

1. Төмөндөгү катарлардын S суммасын, $S_n -$ жекече суммаларын предели катарында аныктагыла.

а) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} +\ \dots + \ \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} +\ \dots\ ;$

б) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} +\ \dots + \ \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} +\ \dots ;$

в) $\frac{2}{1^2\cdot 3^2}+\frac{3}{2^2\cdot 4^2}+\ \dots+\ \frac{n+1}{n^2\cdot(n+2)^2}+\ \dots;$

г) $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\ \dots+\ \frac{2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ \dots;$

д) $\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+\ \dots+\ \frac{1}{n\cdot(n+3)\cdot(n+6)}+\ \dots\ .$

2. Катардын жыйналуучулугун зарыл шартын текшерип, кайсыл катарлар сөзсүз таралуучу экендигин көрсөткүлө.

а) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ \dots+\frac{2n+1}{2n+2}+\ \dots;$ б) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ \dots+\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}+\ \dots;$

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\ \dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ \dots\ .$

3. Салыштыруу теоремаларын пайдаланып, катарлардын жыйналуучу же таралуучу экендигин аныктагыла.

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ \dots+\frac{n}{n^2+1}+\ \dots;$

б) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\ \frac{7}{9\cdot 16}+\ \dots+\ \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+2)^2}+\ \dots;$

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ \dots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ \dots;$

г) $sin^2\alpha+\frac{sin^2 2\alpha}{8}+\frac{sin^3 3\alpha}{27}+\ \dots+\frac{sin^2 n\alpha}{n^3}+\ \dots;$

д) $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\ \dots+\frac{1}{n\cdot 5^n}+\ \dots\ .$

4. Кошинин белгисин пайдаланып жыйналуучулугун изилдегиле.

а) $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ \dots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ \dots;$

б) $\frac{2}{1}+\ \left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ \dots+\ \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ \dots;$

в) $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ \dots+\ \arcsin^n\frac{1}{n}\ +\cdots;$

г) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\ +\ \dots;$

Көрсөтмө: $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$.

5. Даламбердин белгисин пайдаланып жыйналуучулугун изилдегиле.

а) $2 + \frac{2\cdot5}{1\cdot5} + \frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9} + \ \dots + \frac{2\cdot5\cdot8\dots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\dots(4n-3)} + \ \dots$;

б) $1 + \frac{1\cdot4}{3!!} + \frac{1\cdot4\cdot7}{5!!} + \ \dots + \frac{1\cdot4\cdot7\dots(3n-2)}{(2n-1)!!} + \ \dots$;

в) $tg\,\frac{\pi}{4} + \ 2tg\,\frac{\pi}{8} + 3tg\,\frac{\pi}{16} + \ \dots + ntg\,\frac{\pi}{2^n} + \ \dots$;

г) $2 + 1 + \ \frac{8}{9} + \ \dots + \ \frac{2^n}{n^2} + \ \dots$; д) $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ \dots + \frac{n!}{n^n} + \ \dots$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$.

6. Интегралдык белги боюнча жыйналуучулугун изилдегиле.

а) $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ \dots + \frac{1}{2n\ln n} + \dots$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

7. Катардын суммасын 0,0001 тактыкка чейин табуу үчүн, катардын канча мүчөсүн алуу жетиштүү болорун аныктагыла.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\ 2^n}$.

8. Белгиси кезектешме катарлардын жыйналуучулугун изилдегиле.

а) $1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} + \ \dots$;

б) $3 - \frac{4}{2} + \ \dots + (-1)^{n+1}\frac{n+2}{n} + \ \dots$;

в) $1-\frac{1}{3^3}+\ ...+\ (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ ...;$

г) $-1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\ ...+(-1)^n\frac{1}{\sqrt[4]{n}}+\ ...;$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+2)}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ катарын суммасы $\frac{\pi^2}{12}$ болсо,

а) $1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\ ...;$

б) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{4^2}+\ ...$

катарларын суммасын тапкыла.

10. Берилген функционалдык катарлардын жыйналуу (абсолюттук, шарттуу) областтарын аныктагыла:

а) $\frac{1}{x}+\ \frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ ...+\ \frac{n}{x^n}+\ ...;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ \cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ ...\ (1+x^{2n-1})}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n sin^n x}{n^2}$;

к) $\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 3x}{3^2}+\ \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\ ...$.

11. Вейерштрасстын белгисине таянып, берилген аралыкта төмөндөгү функционалдык катарлардын бир калыпта жыйналуучу болорун көрсөткүлө:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \le x < +\infty$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $0 \le x \le 1$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n - x^{-n})$, $\frac{1}{2} \le x \le 2$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \le x < +\infty$.

12. Төмөндөгү функциялардын аныкталуу областын аныктап, анын үзгүлтүксүздүгүн изилдегиле:

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$; б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

13. Даражалуу катарлардын жыйналуу радиустарын аныктап, аралыктын учтарында катардын жүрүм турумун изилдегиле.

а) $\frac{x}{1\cdot 3} + \frac{x^2}{1\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot(n+2)} + \ldots$;

б) $\frac{\ln 2}{1} x^2 + \frac{\ln 3}{3} x^3 + \ldots + \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n+1} + \ldots$;

в) $x - \frac{x^3}{3\cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^5}{3^2\cdot 3\sqrt{3}} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}\cdot n\sqrt{n}} + \ldots$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n+1}$.

14. $y = 2^x$ функциясын $x = 1$ чекитин чеке белинде Тейлордун катарына ажыраткыла.

15. Элементардык функцияларды Маклорендин катарына ажыратуу формулаларын пайдаланып, төмөндөгү функцияларды даражалуу катарга ажыраткыла:

а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y = cos^2 x$ $\left(cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\right.$ эске ал$\left.\right)$;

в) $y = sin^3 x$; г) $y = \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$; д) $y = \frac{x}{1+x-2x^2}$ (жөнөкөй бөлчөккө өзгөртүп түзүү керек).

16. Дифференцирлөө менен төмөндөгү функцияларды x тин даражалары боюнча катарга ажыраткыла:

а) $y = (1+x)\ln(1+x)$; б) $y = arctg\ \frac{2-2x}{1+4x}$; в) $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

г) $y = \arcsin x$.

17. Интеграл алдындагы функцияларды Маклорендин катарына ажыратуу менен төмөндөгү интегралдарды эсептегиле:

а) $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$; б) $\int_0^x \frac{\sqrt[3]{1+t^3}-1}{t^2}dt$; в) $\int_0^x \frac{arctg\ x}{x}dt$; г) $\int_0^x \frac{arsin\ t}{t}dt$.

18. Төмөндөгү функцияларды көрсөтүлгөн аралыкта Фурьенин катарына ажыраткыла:

а) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ эгерде } -\pi < x < 0, \\ 0, \text{ эгерде } 0 < x < \pi, \end{cases}$ $(-\pi,\ \pi)$ аралыгында;

б) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ эгерде } -\pi < x \le 0, \\ 4x, \text{ эгерде } 0 \le x < \pi, \end{cases}$ $(-\pi,\ \pi)$ аралыгында;

в) $f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ эгерде } -\pi < x \le 0, \\ 3x, \text{ эгерде } 0 \le x < \pi, \end{cases}$ $(-\pi,\ \pi)$ аралыгында;

г) $f(x) = |\sin x|$, $(-\pi,\ \pi)$ аралыгында;

д) $f(x) = \frac{x}{2}$, $(-\pi,\ \pi)$ аралыгында .

Жооптор:

1. а) $S_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),\ S = \frac{1}{3}$; б) $S_n = 1-\frac{1}{(n+1)^2}$,$S = 1$;

в) $S_n = \frac{3}{8}-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right],\ S = \frac{3}{8}$; г) $S_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$,$S = \frac{1}{2}$;

д) $S_n = \frac{1}{18}\left[\frac{73}{60}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)\right]$, $S = \frac{73}{1080}$;

2. а) Таралуучу; б) Таралуучу; в) Зарыл шарт жыйналуучулугуна кепилдик бере албайт.

3. а) Таралуучу; б) Жыйналуучу; в) Таралуучу; г) Жыйналуучу;

д) Жыйналуучу.

4. а) Жыйналуучу; б) Жыйналуучу;   в) Жыналуучу; г) Жыйналуучу.

5. а) Жыйналуучу;   б) Таралуучу;   в) Жыйналуучу;   г) Таралуучу;

д) Жыйналуучу; е) Жыйналуучу.

6. а) жыйналуучу; б) Жыйналуучу;   в) Жыйналуучу; г) Жыйналуучу.

7. а) $N \geq 71$;   б) $N \geq 6$;   в) $N \geq e^{1000} + 1$;   г) $N \geq 5$;   д) $N \geq 5$;

е)$N \geq 5$.

8. а) Абсолюттук жыйналуучу;   б) Таралуучу;   в) Абсолюттук жыйналуучу;   г) Шарттуу жыйналуучу;   д) Шарттуу жыйналуучу;

е) Шарттуу жыйналуучу.

9. а) $\frac{3}{2}\ln 2$;   б) $\frac{1}{2}\ln 12$;

10. а) $|x| > 1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу;   б) $x > 1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу;   в) $x > -\frac{1}{3}$, $x < -1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу; г) $|x| < -1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу; д) $|x| \neq 1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу, ал эми $x = -1$ болгондо шарттуу жыйналуучу;   е) $|x| < 1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу;   ж) $|x| < 1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу;   з) $x \neq -1$ болгондо абсолюттук жыйналуучу;   и) $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ болгондо абсолюттук жыйналуучу ($k \in Z$) ;   к) Бардык чекиттерде абсолюттук жыйналуучу.

12. а) $|x| < \infty$ болгондо үзгүлтүксүз жана аныкталган;   б) $|x| > 0$ болгондо аныкталган, ал эми $x = 0$ чекитинде үзүлүшкө ээ.

13. а) $-1 \leq x \leq 1$;   б) $-1 \leq x < 1$;   в) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$;

г) $-1 < x \leq 1$.

14. $$2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(x-1)^n ln^n 2}{n!} \;, -\infty < x < +\infty \;.$$

15. а) $x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n-2}, -1 < x < 1$;

б) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2^n (2n)!} x^{2n}, -\infty < x < \infty$;

в) $\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, -\infty < x < \infty$;

г) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}, -1 < x < 1$; д) $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

16. а) $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, -1 \le x \le 1$;

б) $arctg\, 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}, \quad -\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{4}$;

в) $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1$;

г) $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1$.

17. а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(n+1)}, -\infty < x < \infty$;

б) $\frac{x^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n+5)}{n! \cdot (3n-1) \cdot 3^n} x^{2n+1}, -1 < x < 1$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, -1 \le x \le 1$;

г) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\ ,\qquad -1\leq x\leq 1\ .$

18. а)$f(x)=\frac{3}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\ ,S(\pm\pi)=\frac{3}{2}\ ,S(0)=\frac{3}{2}\ ;$

б)$f(x)=\pi-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\ ,S(\pm\pi)=2\pi\ ;$

в) $f(x)=\frac{5}{4}\pi-\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\ ,$

$S(\pm\pi)=\frac{5}{2}\pi;$

г) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\ ;$

д) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\ (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\ ,\ S(\pm\pi)=0.$

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Асанов А, Булатаева В.В. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Бишкек: Университет «Дастан», 1999, - 88 с.

2. Бекбоев И. Жогорку математиканын жалпы курсу. – Бишкек: «Педагогика», 2000.

3. Бөрүбаев А.А., Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 1- 2 – бөлүктөр. – Бишкек: «Мектеп», 2002.

4. Каримов С. Элементардык функциялар. – Фрунзе: «Мектеп»,1971, - 120 б.

5. Сопуев С. Методические указания и упражнения по теории аналитических функций. 1- 2 – части. – Ош: Ошский госпединститут, 1989, - 9,75 п.л.

6. Рафатов Р, Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык теңдемелер. – Бишкек: «Манас» университети, 2007, - 230 б.

7. Усубакунов Р. Дифференциальдык жана интегралдык эсептөөлөр. 1 – 2 – бөлүктөр. – Фрунзе:

8. Демидович Б.П. и другие. Сборник задач по математике для втузов. – Москва: «Наука», 1981, - 464 с.

9. Зельдович Я.Б. Высшая математике для начинающих. – Москва: «Наука», 1970, - 560 с.

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: «Наука», 1968, - 497 с.

11. Краснов М.Л. и другие. Вся высшая математика, т -1-5 – Москва: «УРСС», 2002.

12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М: «Наука»,

1974, - 450 с.

13. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш.. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: «Илим», 1990, - 100 с.

14. Мамаюсупов М.Ш. Инженердик адистиктерде математиканы окутууга коюлуучу айрым талаптар жөнүндө. – Бишкек: Журн. «Известия КАО», 2005, № 3, - с. 80-81.

15. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. – Ош: Журн. ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», 2007, № 3, - с. 161-163.

16. Мамаюсупов М.Ш. Студенттердин кесиптик билимдерин өздөштүрүүсүндө математиканын орду. – Ош: Журн. «Вестник ОшГУ», 2008, № 1, - с. 74-77.

17. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математиканы окутуу программасына айрым өзгөртүүлөрдү киргизүү жөнүндө. – Ош: Журн. «Известия ОшТУ», 2008, - с. 188-192.

18. Аттокурова А. Дж., Барышникова Т.Л., Мамаюсупов М.Ш. Математиканы интерактивдүү ыкма менен окутуу маселелери. – Ош: «ЦП. Максимум», 2008, - 94 б.

Мамаюсупов Маккамбай Шеранович

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА БОЮНЧА ОКУМА

(3 – бөлүк)

Электрондук окуу китеби

Ош мамлекеттик университетинин жогорку математика

кафедрасын 8.02.14, №4 чечими менен

окуу китеби катарында сунушталган

Чиймелерин сызган К.Х. Абдиваитов.

Көлөмү 292 бет.